مقاومة المواد

المهندس
إياد محمود الداهوك

المهندس
شادي محمود أبو سريس



مكتبة المجتمع العربي
للنشر والتوزيع

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

مقاومـة المـواد

مقاومـــة المـــواد

المهندس

إياد محمود الداهوك

المهندس

شادي أبــو سريس

الطبعة الأولى

2012م – 1433هـ



رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011/6/2236)

624.18

الداهوك، اياد محمود

مقاومة المواد / اياد محمود الداهوك، شادي محمود ابو سريس.-

عمان: مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، 2011

( ) ص

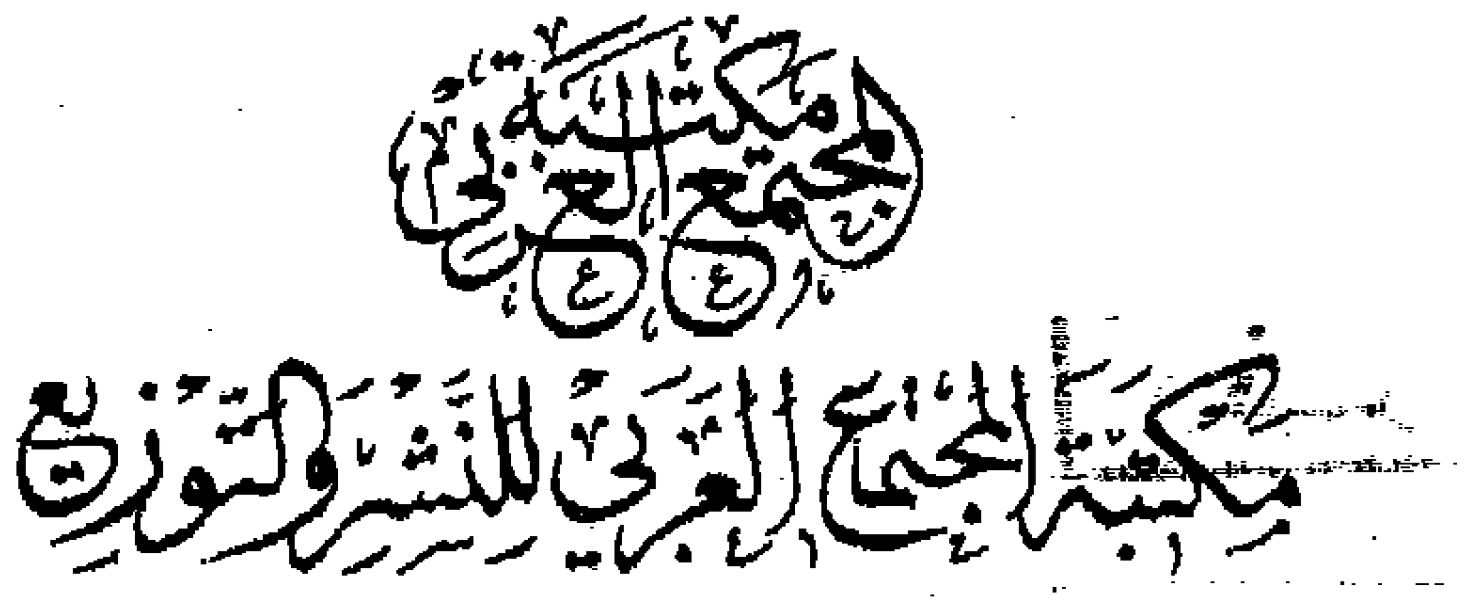
ر.إ. : 2011/6/2236

الواصفات: /المواد//اختبار المواد//خواص المواد

- يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى.

الطبعة العربية الأولى

2012م – 1433هـ



عمان – وسط البلد – ش. السلط – مجمع الفحيص التجاري

تلفاكس 4632739 ص.ب. 8244 عمان 11121 الأردن

عمان – ش. الملكة رانيا العبد الله – مقابل كلية الزراعة –

مجمع زهدي حصوة التجاري

www: muj-arabi-pub.com

Email: Moj_pub@hotmail.com

ISBN 978-9957-83-084-7 (ردمك)

الفهرس

الموضوع	رقم الصفحة

الوحدة الثالثة : الإجهادات الحرارية

الوحدة الرابعة: إجهاد القص وإنفعال القص

الوحدة الخامسة :الإلتواء

الوحدة السادسة: عزم الإنحناء

الوحدة السابعة: إنبعاج الأعمدة

المقدمة

يعتبر هذا الكتاب المقرر الدراسي لكليات المجتمع التي تدرس هذه المادة، وفقا للمناهج المتبعة.

إن علم مقاومة المواد تمكن طلبة التخصصات الهندسية التي تدرس هذا المساق من معرفة عدد من المواد العلمية الهامة والمعقدة، مثل: الإجهادات والإنفعالات، والإجهادات في الوصلات الميكانيكية، وإجهادات التي في الأعمدة والمحاور الدوارة، وقوى القص، وعزوم الإنحناء في المحاور، والقضبان، والإنبعاج في الأعمدة.

وتعتبر هذه الدراسة ذات ضرورة لوضع تصاميم مثالية للإنشاءات والمكائن، ذات التعقيد وطويلة الخدمة.

ويضم هذا الكتاب بالإضافة إلى المادة النظرية، عددا وافيا من المسائل والأمثلة التي تساعد الطالب في فهم واستعياب المادة، وكذلك في اختيرا امحتان الشامل لكليات المجتمع.

إن نظام وحدات القياس العالمية (SI) وهو الذي اتبع في هذا الكتاب. كما استخدم نظام الرموز العالمية للدلالة على كافة الكميات والمقادير.

آمل أن يكون هذا الكتاب قد أدى الغرض المنشود منه ويستفيد منه كل طلبة كليات المجتمع والجامعات في الأردن وخارجها من الطلبة العرب، في دراسة علم مقاومة المواد.

الوحدة الأولى

مقدمة في مقاومة المواد

الوحدة الأولى

مقدمة في مقاومة المواد

إن الإنشاءات والمكائن المختلفة، والتي يصممها المهندسون ويبنونها، يجب أن تكون متصفة بالمقاومة. أي مدى قابليتها لمقاومة الانهيار، تحت تأثير تسليط أحمال أو قوى خارجية عليها. لذا يجب أن تُصنع بشكل دقيق، من حيث نوع المادة وأبعادها وشكلها.

لذا تقسم المواد الهندسية إلى قسمين رئيسيين وهما:

1- المواد المعدنية:

وتنقسم هذه المواد أيضا إلى قسمين:

أ. المعادن الحديدية: وتشمل الحديد بجميع أنواعه.

ب. المعادن غير الحديدية: وتنقسم إلى ثلاث أقسام وهي:

- ❖ معادن ثقيلة: مثل النيكل والنحاس.
- ❖ معادن خفيفة: مثل الألمنيوم.
- ❖ معادن طرية: مثل القصدير.

2- المواد غير المعدنية:

وتنقسم إلى قسمين:

أ- مواد البناء: مثل الحجارة والأسمنت.

ب- مواد متنوعة: مثل المطاط والبلاستيك والفلين.

1-1) أنواع الأحمال:

الأحمال التي تؤثر على الإنشاءات وعلى أجزائها سواء كانت قوى أو ازدواجات قوى مثل العزوم، تعتبر قوى مركزة أو موزعة، ولكن القوى المركزة ليس لها وجود في الطبيعة، والحقيقة أن القوى تكون موزعة على بعض المساحات والحجوم، ويمكن أن تستبدل الأحمال الموزعة بأحمال أخرى مركزة مساوية لها بالمقدار والاتجاه، وذلك حتى تسهل العمليات الحسابية.

وتقسم الأحمال (القوى) إلى ثلاث أقسام رئيسية:

1- الأحمال الاستاتيكية: وهي تلك الأحمال التي يتغير مقدارها أو نقطة تأثيرها أو اتجاه عملها بسرعة ضئيلة جدا وبذلك يمكن اعتبارها ثابتة.

2- الأحمال الديناميكية: وهي تلك الأحمال التي تتغير مع الزمن بسرعة كبيرة ولا يمكن إهمالها (مثل الصدم).

3- الأحمال المكررة: وهي تلك الأحمال التي لا يكون لتغير الحمل مع الزمن طبيعة ثابتة (مثل الأحمال على البيوت من رياح وثلوج).

1-2) الإجهاد العمودي وإجهاد القص:

1-2-1 الإجهاد العمودي:

يعرف الإجهاد العمودي على أنه شدة تأثير القوة على وحدة المساحة في المقطع العرضي للقضيب، ويرمز للإجهاد بالرمز (σ)، لذى يعطي الإجهاد بالعلاقة التالية:

$$\text{الإجهاد} = \frac{\text{القوى المسلطة}}{\text{مساحة المقطع}}$$

$$\sigma = F / A \qquad (1\text{-}1)$$

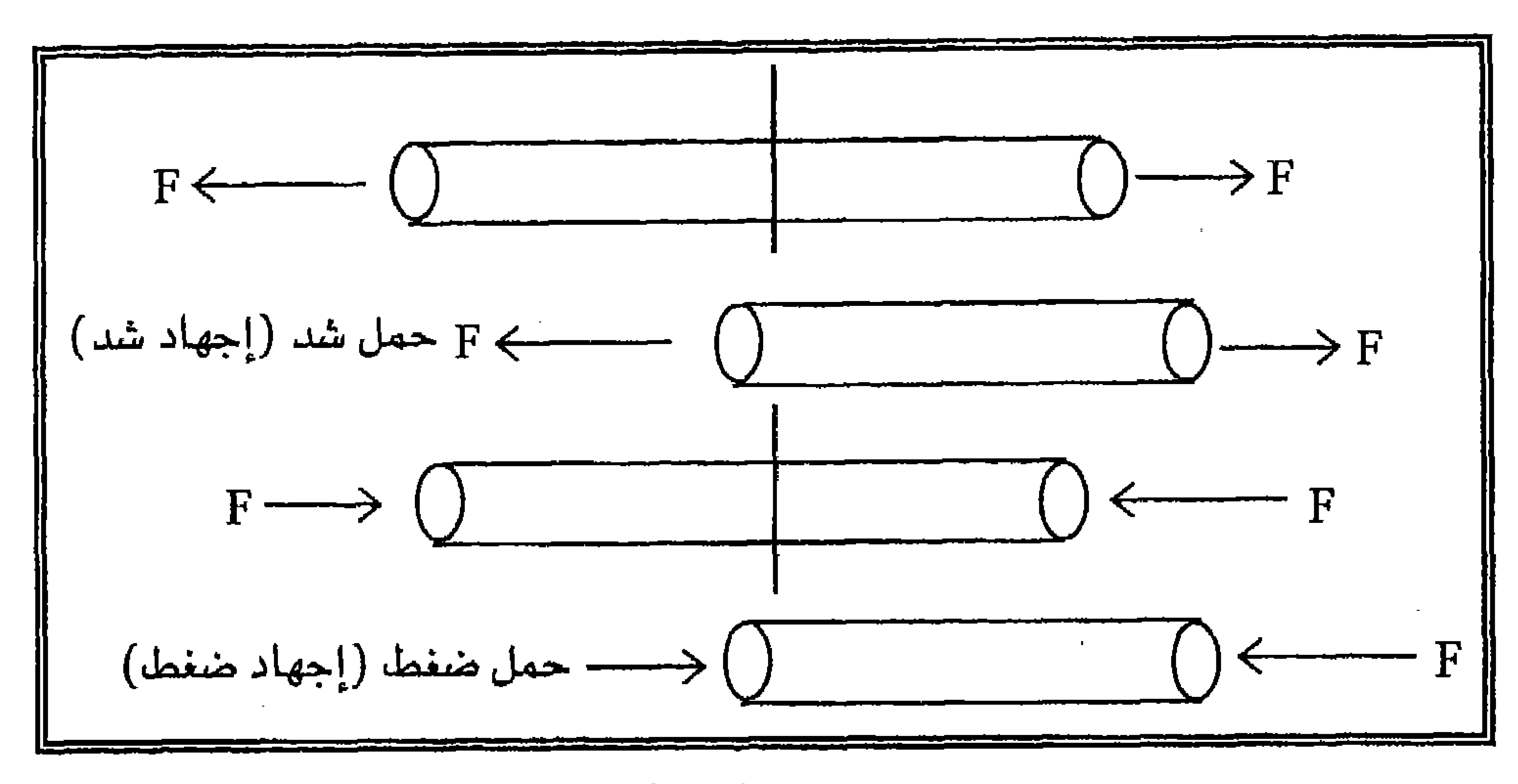
حيث:

6: الإجهاد العمودي أو البسيط $\left(N/mm^2 \text{ ،} \frac{N}{cm^2} \text{ ، } Pa = \frac{N}{m^2} \right)$.

F: القوة المؤثرة (N).

A: مساحة المقطع (mm^2, cm^2, m^2)

ينشأ الإجهاد العمودي عن تأثير قوة محورية مركزية بشكل عمودي على مقطع المساحة.

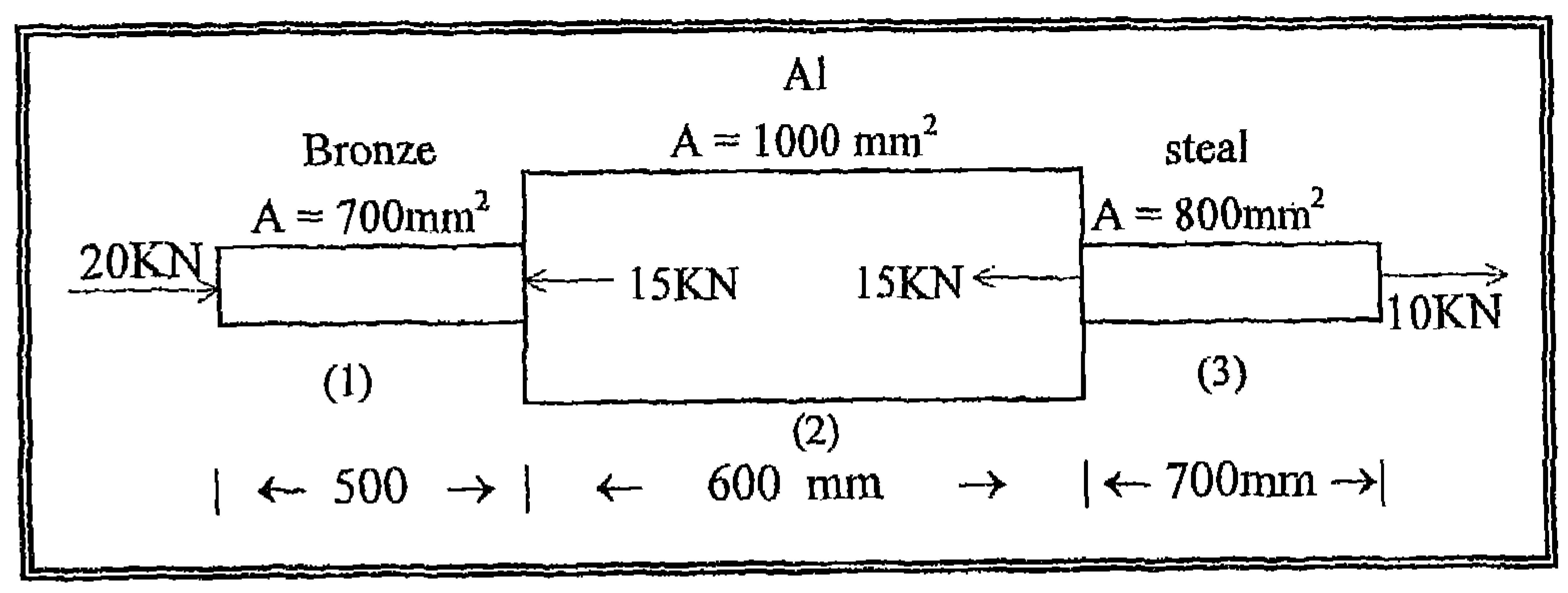


شكل (1-1)

ويعتبر الإجهاد موجبا إذا كان شادا وسالبا إذا كان ضاغطا.

مثال (1):

قضيب من الألمنيوم مثبت بجسوءة بين قضيب برونزي وآخر فولاذي كما في الشكل، سلطت الأحمال المحورية عليه كما يلي، احسب الإجهاد في كل مادة:



شكل (1-2)

المقطع (1):

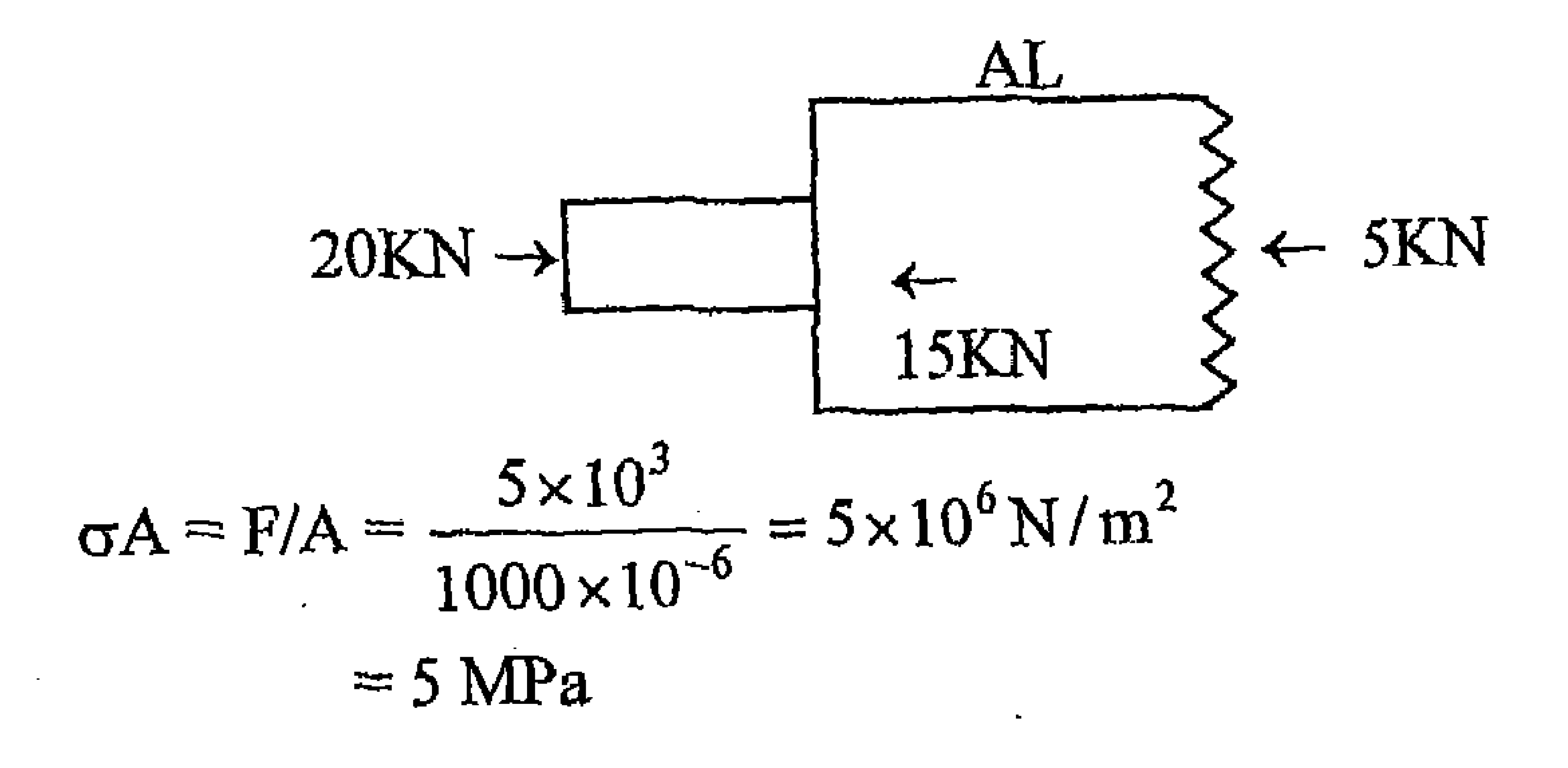
20KN → ⟶ ←20KN

Br

$$\sigma_b = F/A = \frac{20\times10^3}{700\times10^{-6}} = 28.57\times10^6\,\frac{N}{m^2}$$

$= 28.57$ MPa.

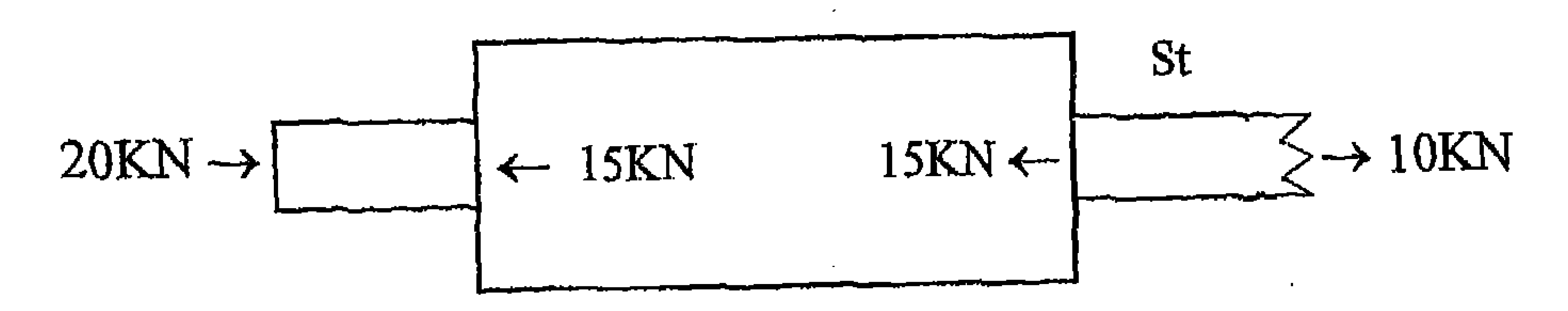
المقطع (2):



$$\sigma A = F/A = \frac{5\times10^3}{1000\times10^{-6}} = 5\times10^6\,N/m^2$$

$= 5$ MPa

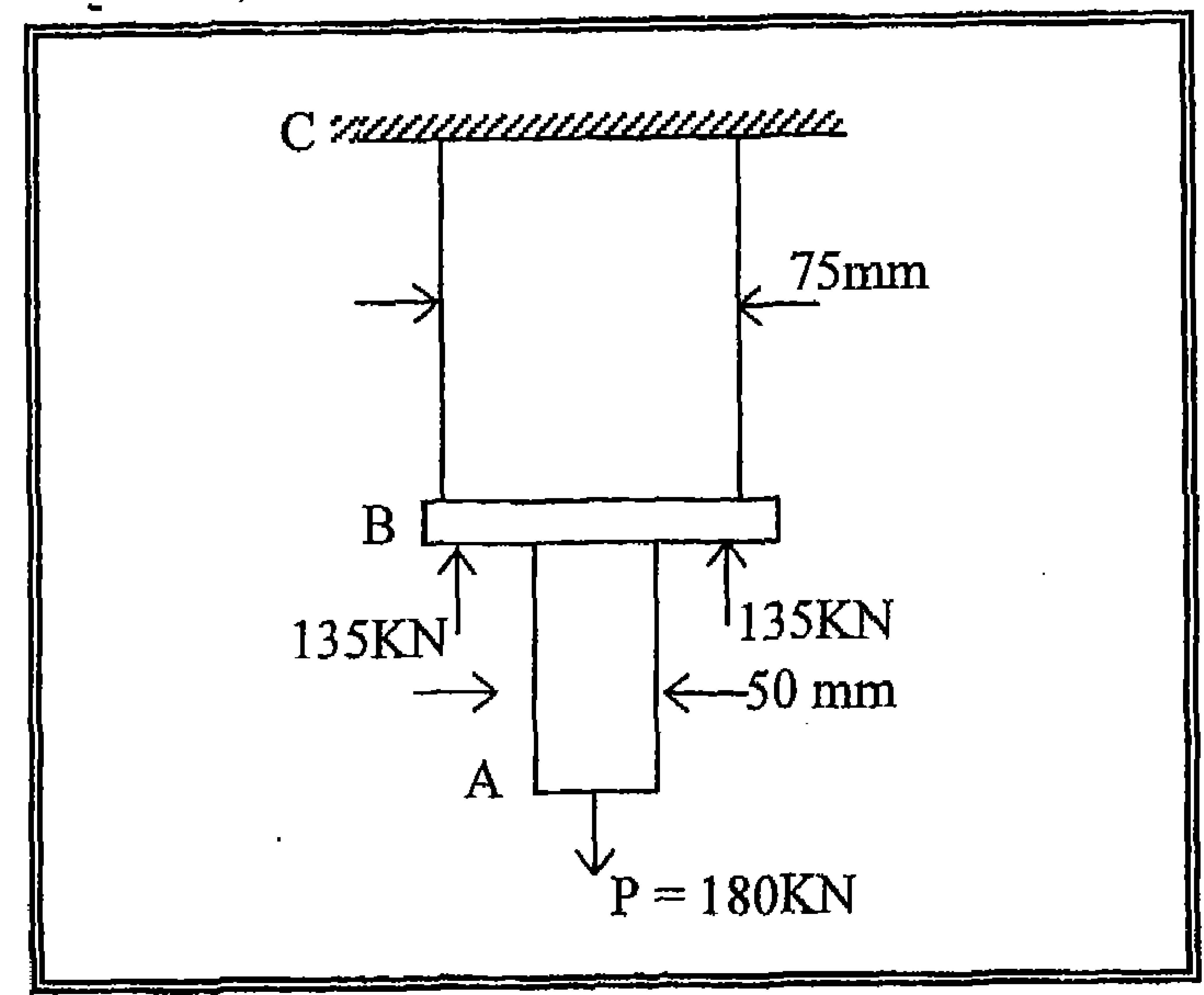
المقطع (3):



$$\sigma_s = F/A = \frac{10\times10^3}{800\times10^{-6}} = 12.5 \times 10^6 \text{ N/m} = 12.5 \text{ MPa}$$

مثال (2):

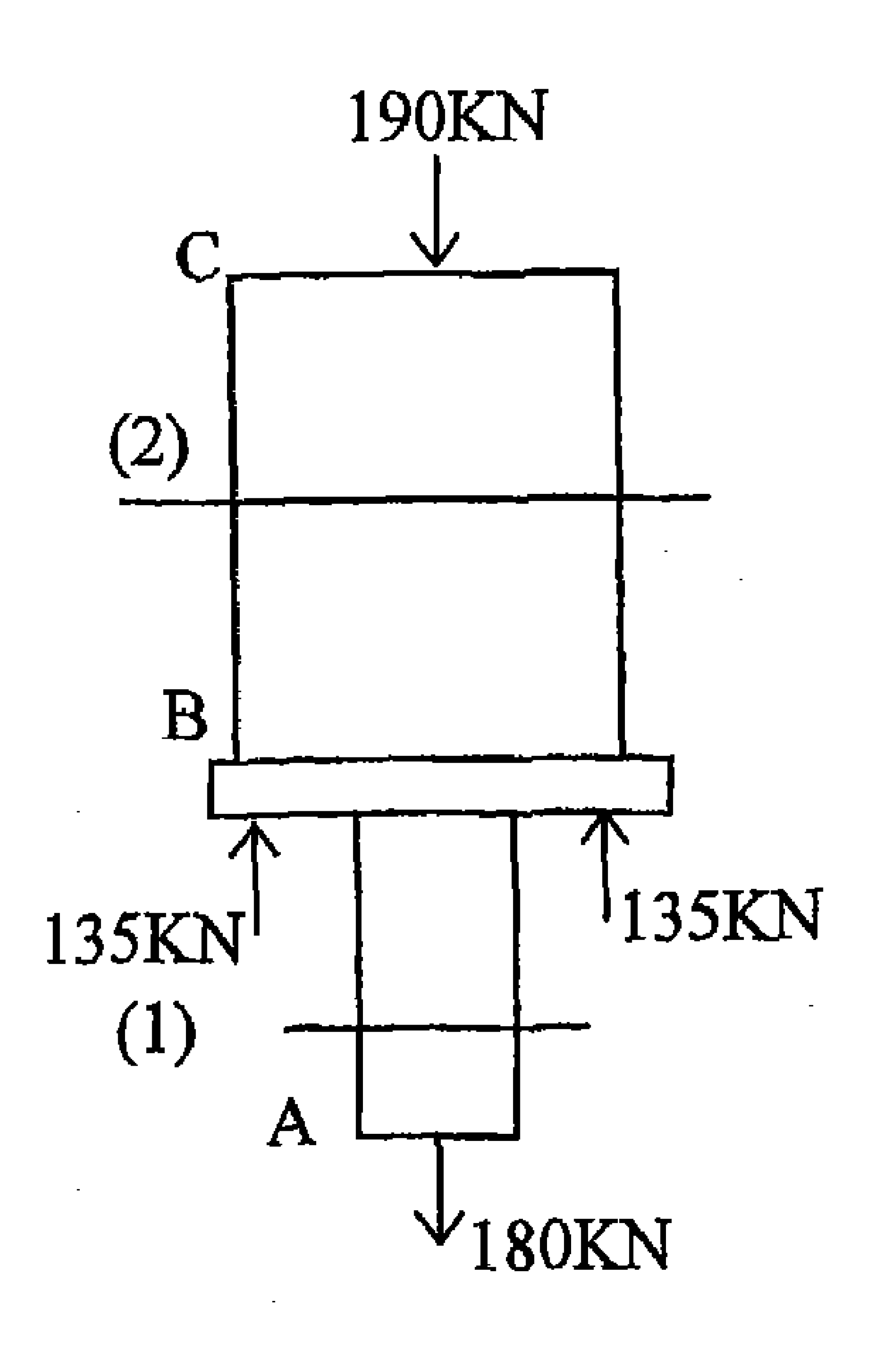
اسطوانتان مصمتتان تم وصلهما عند النقطة B أوجد الإجهاد في كل اسطوانة.



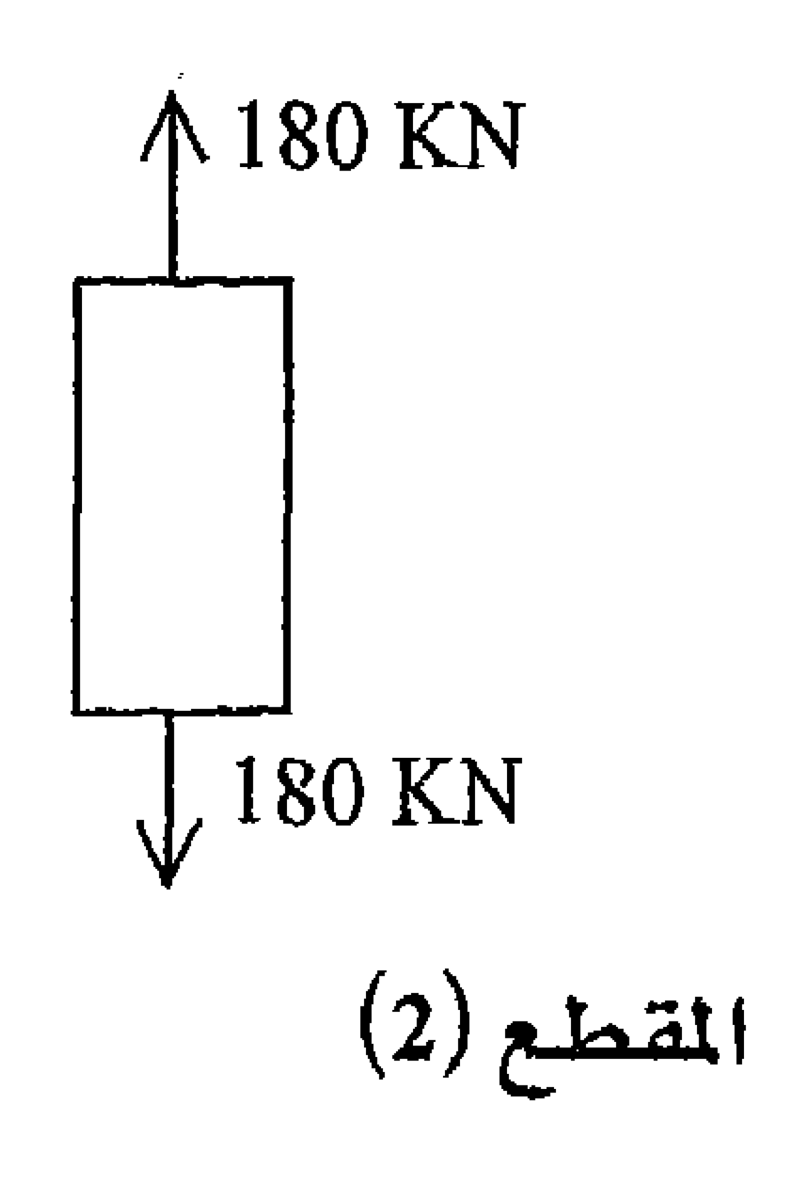
شكل (3-1)

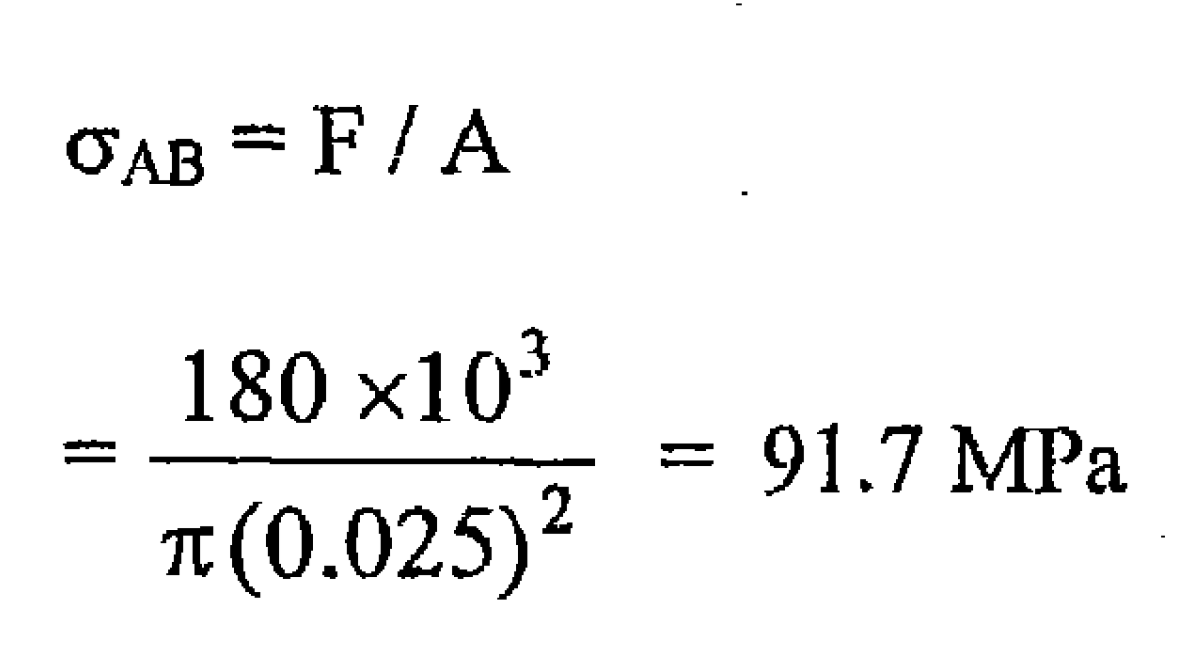
الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر.



المقطع (1):

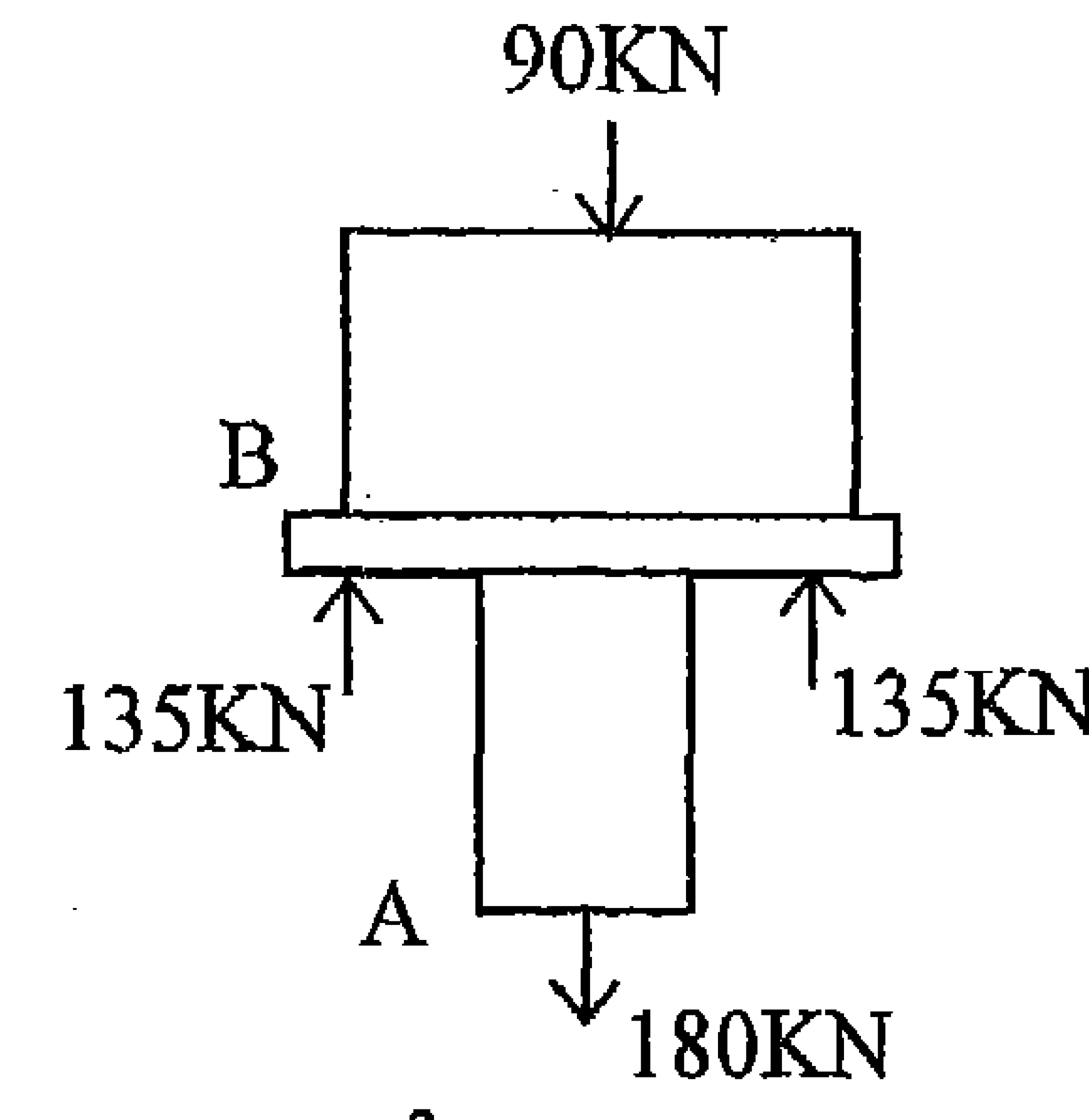




$$\sigma_{AB} = F / A$$

$$= \frac{180 \times 10^3}{\pi (0.025)^2} = 91.7 \text{ MPa}$$

المقطع (2)



$$\sigma_{BC} = F / A = \frac{90 \times 10^3}{\pi (0.0375)^2}$$

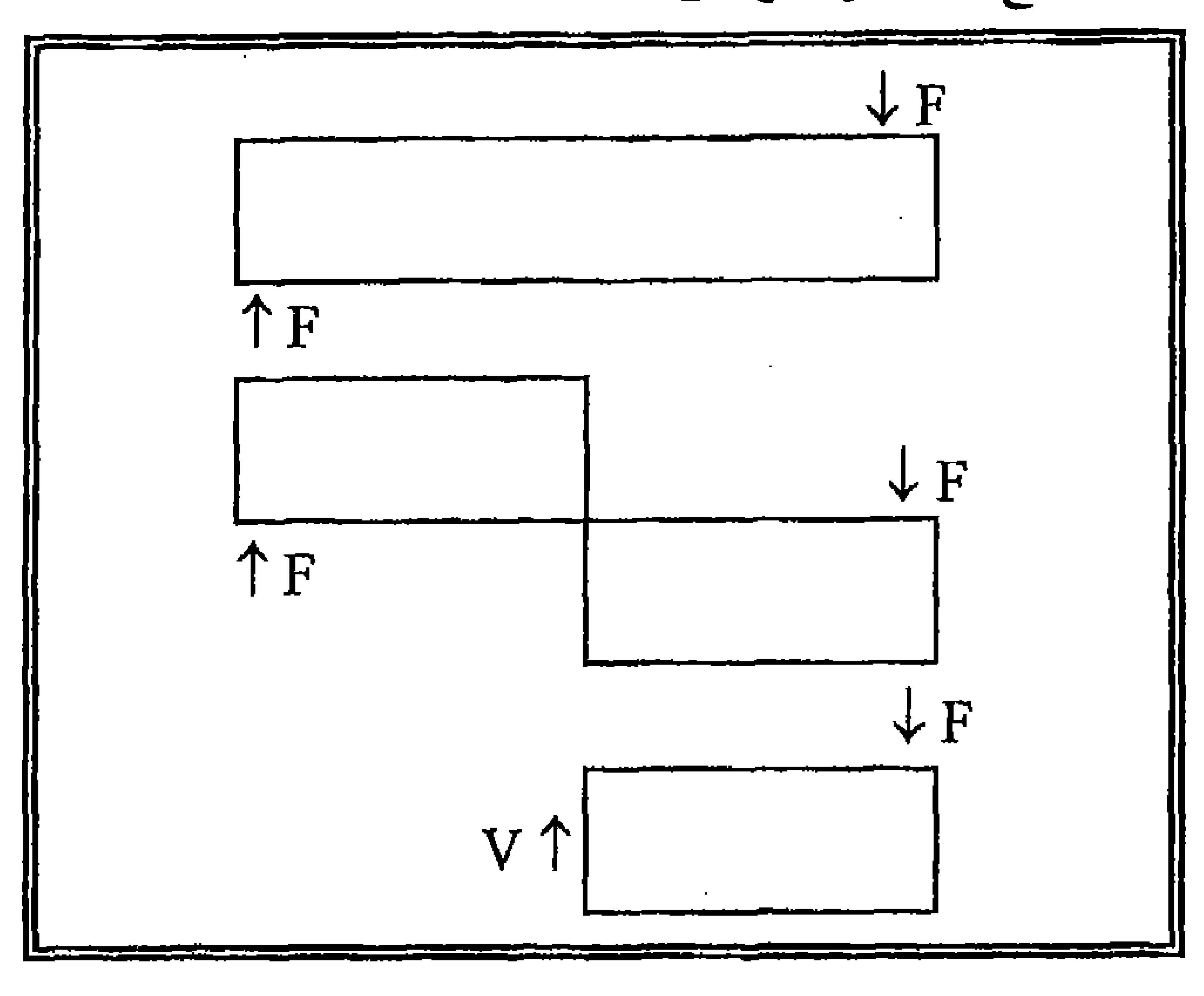
$$= 20.37 \text{ MPa.}$$

1-2-2 إجهاد القص

فيعرف على أنه مقدار قوة القص المؤثرة على مساحة القص. ويرمز له بالرمز (τ) أما قوة القص فتعرف على أنها: القوة التي تؤثر بامتداد مستوى أو سطح من الجسم، ويرمز بالرمز (Fs). لذا نلاحظ أن القوة في الإجهاد العمودي تكون عمودية على مساحة المقطع أما قوة القص تكون بموازاة المساحة التي تؤثر عليها.

ينشأ إجهاد القص من وجود قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه ومتوازيتين وخط عملهما ليس في نفس الاتجاه.

يتولد إجهاد القص في البراغي (bolts) والبراشيم (rievets) ومسامير الربط (Pins) وجميع مناطق الوصل.



شكل (4-1)

V = F : قوة القص (N).

وتعطى علاقة إجهاد القص كما يلي:

$$\tau = \frac{V}{A_s} = \frac{F}{A_S}$$

حيث:

τ : إجهاد القص (Pa).

V : قوة القص (N).

As : مساحة مقطع القص (mm^2, cm^2, m^2).

3-1) مفهوم الإنفعال:

بسبب تأثير القوة الخارجية على المواد الأجسام فإن هذه الأجسام تتفعل أو تستجيب لهذه القوى، ويكون مقدار وشكل هذا الإنفعال (أو التشوه) على حسب نوع الإجهاد المؤثر، ففي حالة الإجهادات العمودي فإن التشوه يكون على شكل تغير في الأبعاد، فإن كان الإجهاد شدا يكون الإنفعال زيادة بالطول ويسمى الاستطالة، أما إذا كان الإجهاد ضغطا يكون الإنفعال نقصان بالطول ويسمى تقلصا، أما في حالة إجهاد القص فإن التشوه لا يكون على شكل تغير في أبعاد العينة، ولكن تشوه في زوايا الجسم، ومقدار التغير بالزاوية هو انفعال القص ويقاس بالراديان.

في حالة الإجهادات العمودية يعرف الإنفعال على أنه التغير في وحدة الطول الجسم ما أو أنه مقدار التغير في الطول إلى الطول الأصلي.

الوحدة الثانية

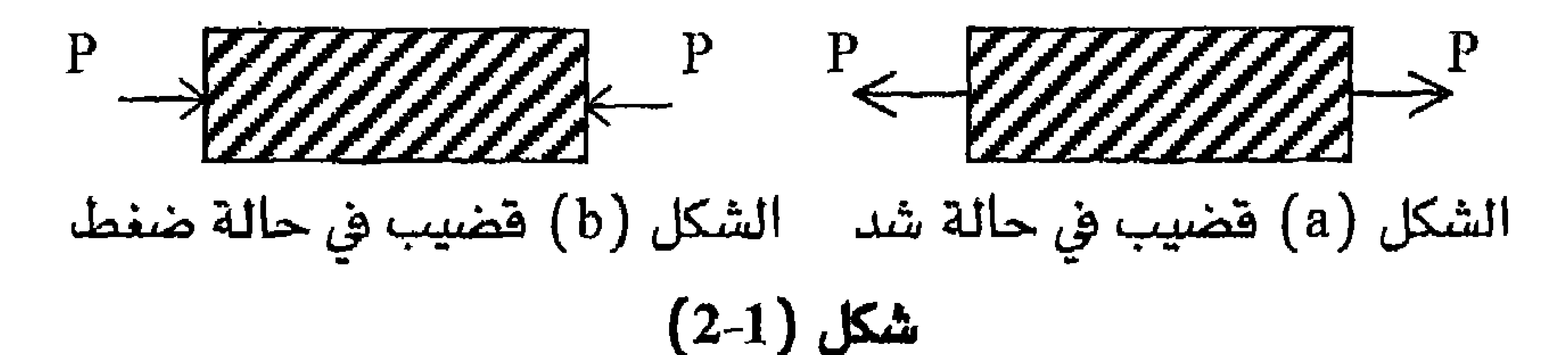
الشد والضغط

الوحدة الثانية

الشد والضغط

(2-1) الانفعال العمودي تحت تأثير حمل محوري:

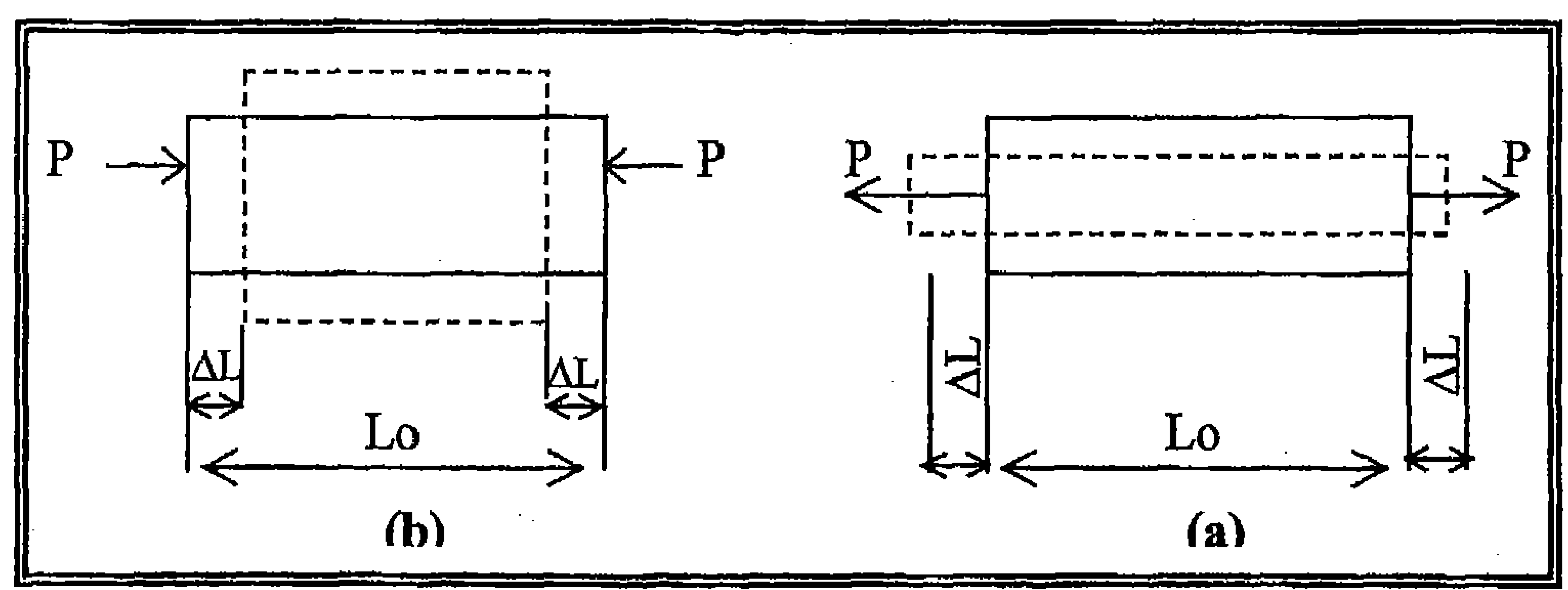
إن مجال بحثنا في حالة الشد (Tension) أو الضغط (Compression) المحوري (المركزي)، عندما تكون القوى الخارجية باتجاه محور القضيب، ويكون القضيب مستقيما وله مقطع عرضي ثابت، وتكون القوتين متضادتان في الاتجاه ومتساويتان بالمقدار ليحدث الاتزان الاستاتيكي، وتكون هاتين القوتين محملتين عند نهايتي القضيب، الشكل (2-1-a) (2-1-b)، واتجاه عملها على خط واحد.



الشكل (a) قضيب في حالة شد   الشكل (b) قضيب في حالة ضغط

شكل (2-1)

وينطبق على المحور الطولي للقضيب الذي يمر بمركز الثقل. فيكون الإنفعال الذي ترمز بالرمز (ε) استطالة في حالة الشد وتقلص في حالة الضغط، الشكل (2-2-a) (2-2-b).



شكل (2-2)

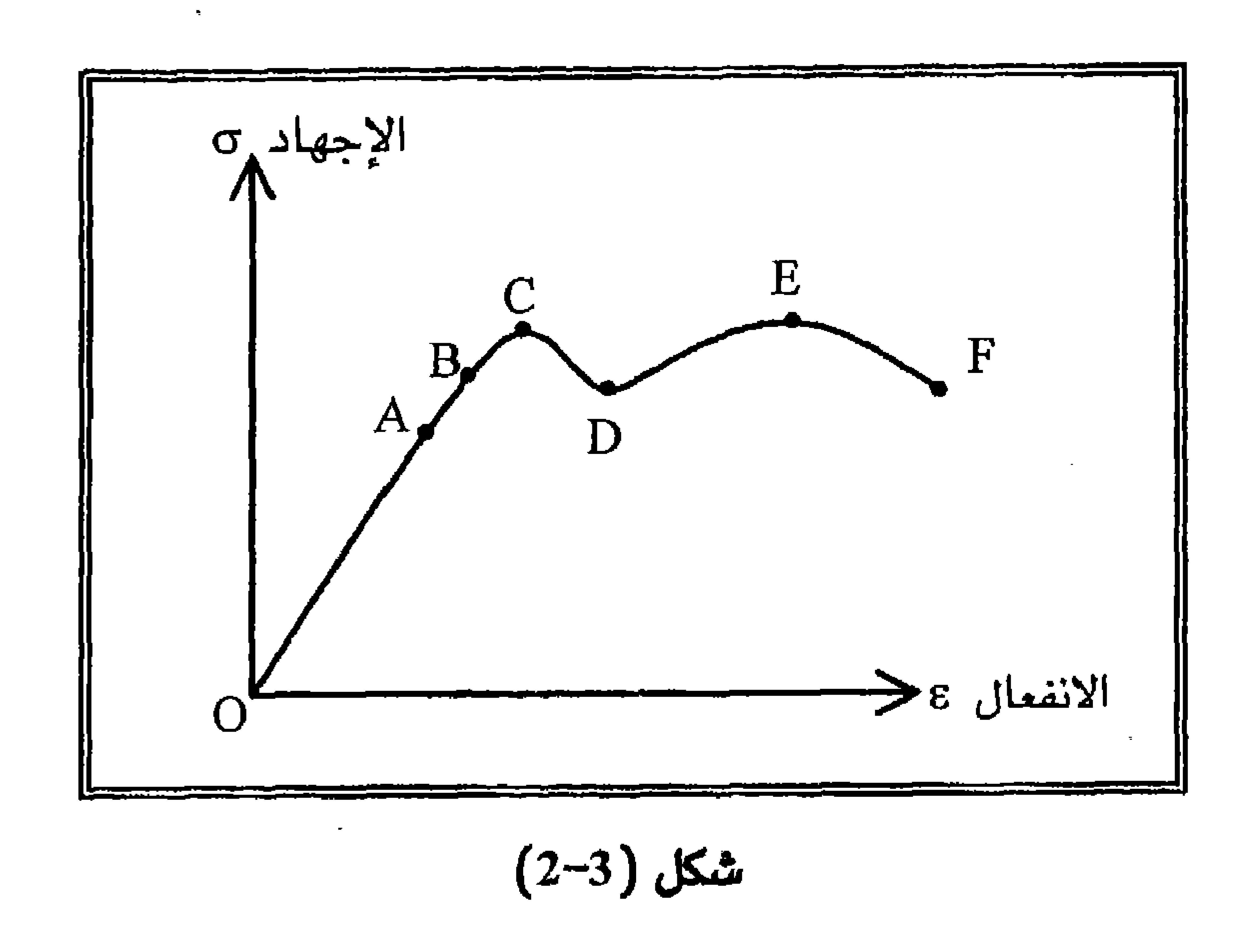
فإذا رمزنا للطول الأصلي بالرمز (Lo) والتغير في الطول (ΔL) فإن الانفعال العمودي يعطي بالعلاقة التالية:

$$\text{الانفعال} = \frac{\text{التغير في الطول}}{\text{الطول الأصلي}}$$

$$\varepsilon = \Delta L / Lo \qquad (2\text{-}1)$$

(2-2) منحنى الإجهاد والإنفعال:

لدراسة خواص المواد وتحديد مقدر الإجهادات المسموح لها، والتشوهات الحادثة لها، تجري هذه الاختبارات على نماذج لمواد متعددة حتى انهيارها، ويكون الحمل استاتيكيا في حالة اختبارات الشد والضغط وتجري التجربة في ظروف قياسية لأن نتائج الاختبارات تتعلق بشكل العينة، وسرعة التشوه والحرارة عند إجراء الاختبار، ويتم هذا الاختبار باستخدام أجهزة اختيار خاصة مختلفة ومتنوعة. إن الهدف من هذه الاختبارات هو تحديد الخصائص الميكانيكية للمادة، وخلال اختبار الشد يتم رسم المنحنى البياني للعلاقة بين قوة الشد (F) ومقدار الاستطالة (ΔL) أو بين إجهاد الشد (σ) والإنفعال (ε). ويتم زيادة الحمل المحوري تدريجيا حتى تنكسر العينة، وبأخذ قيم الإجهاد والإنفعال يتم رسم هذه القراءات على منحنى بياني بوضع الإجهاد على المحور العمودي (Y) والإنفعال على المحور الأفقي (X) ويضع الرسم البياني في الشكل (3-2) تجربة الشد لعينة من الحديد الفولاذي ذي نسبة الكربون المنخفضة.



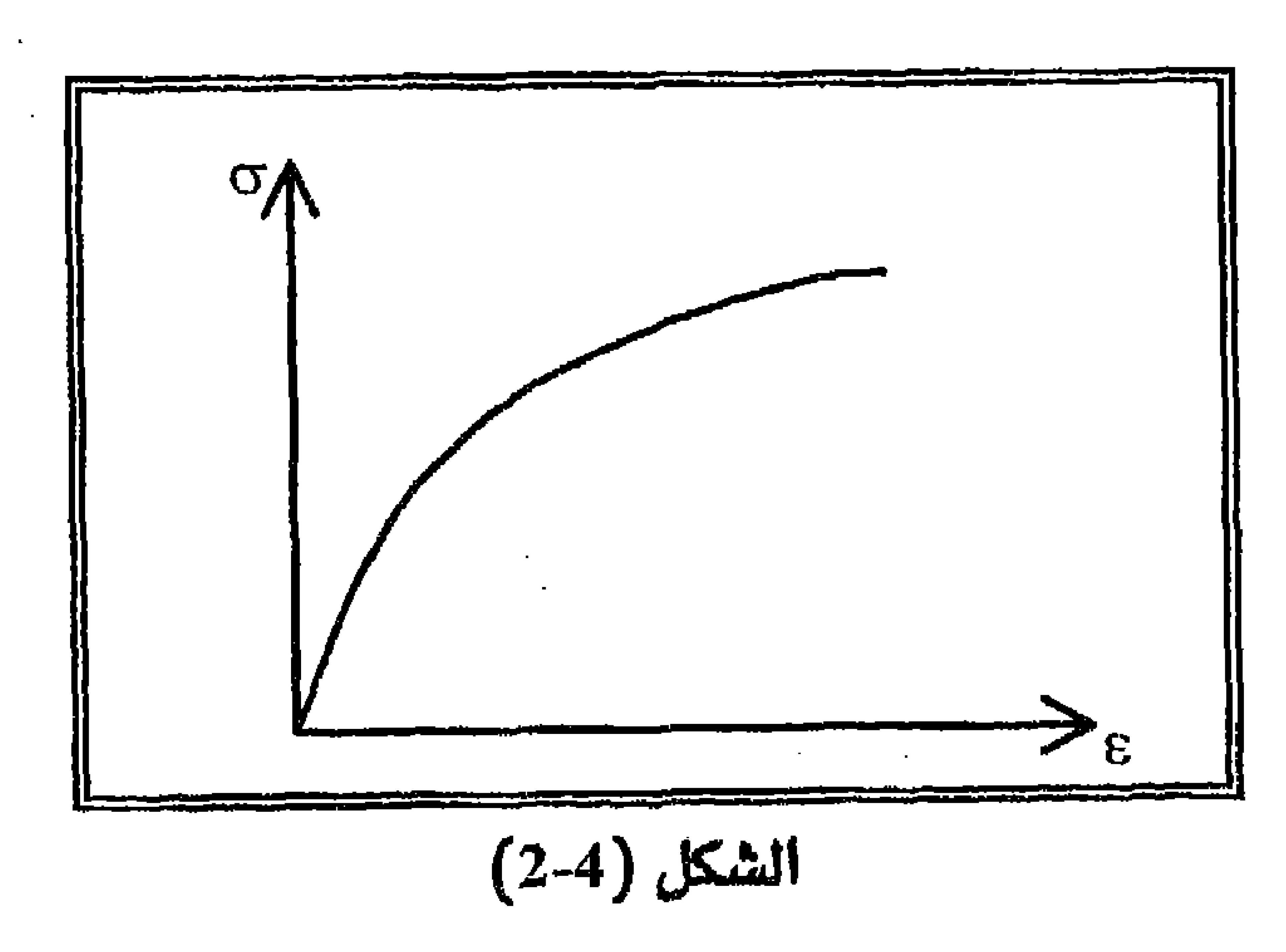
شكل (3-2)

ففي القسم (OA) حيث يكون الخط مستقيما وتتناسب الإجهادات مع الانفعالات تناسبا طرديا، لذا نسمي النقطة (A) بحد التناسب.

وفي المنطقة (AB) تبقى المادة في الحالة المرنة ولكن يأخذ الرسم البياني شكل المنحنى، وتحتفظ المادة بخواصها المرنة، أي أنه بعد زوال الإجهادات تعود إلى شكلها الأصلي، وتسمى النقطة (B) بحد المرونة، والفرق بين حد المرونة وحد التناسب قليل جداً، وعمليا لا يمكن تحديد هذا الفرق. وعند تزايد الحمل أكثر يبدأ الإنفعال بالزيادة عمليا دون زيادة بالإجهاد، يسمى هذا الحد بحد الخضوع. حيث تصبح التشوهات دائمة. وتسمى النقطة (C) بنقطة الخضوع العليا والنقطة (D) نقطة الخضوع السفلى. يصل الإجهاد إلى أقصى مقدار له عند النقطة (E) ويرمز لها أيضا (UTS) أي المقاومة القصوى أو حد المقاومة.

بعد بلوغ العينة لحد المقاومة، يبدأ ظهور منطقة الرقبة أو التخصّر لهذه العينة حيث تقل مساحة مقطع العينة في هذه المنطقة بشكل سريع لذلك تنخفض القوة والإجهاد ويحدث التمزق والانكسار، ونسمي النقطة (F) بنقطة الانهيار أو الانكسار.

يمثل المنحنى السابق في الشكل (2-3) منحنى الإجهاد - الإنفعال للمواد المرنة. أما بالنسبة للمواد الهشة، وهي المواد القابلة للانهيار عند تشوهات بسيطة فإن المنحنى الموضح بالشكل (2-4) يبين أن الإجهادات والإنفعالات تكون أقل منها في حالة المواد المرنة ويصعب تمييز الخواص الميكانيكية عليها.



الشكل (2-4)

(2-3) معامل المرونة (معامل يونغ):

لقد تبين في تجربة الشد وفي منطقة حد التناسب أن الإجهادات تتناسب طرديا مع الانفعالات:

$\sigma \propto \varepsilon$

σ = ثابت × ε

وسمي هذا الثابت بمعامل المرونة أو معامل يونغ، وتم صياغة هذه المعادلة بالصيغة العامة لقانون هوك، حيث سمي هذا الثابت بثابت قانون هوك ورمز له بالرمز (E) ويعطي قانون هوك بالعلاقة التالية:

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad \text{......} \quad (2\text{-}2)$$

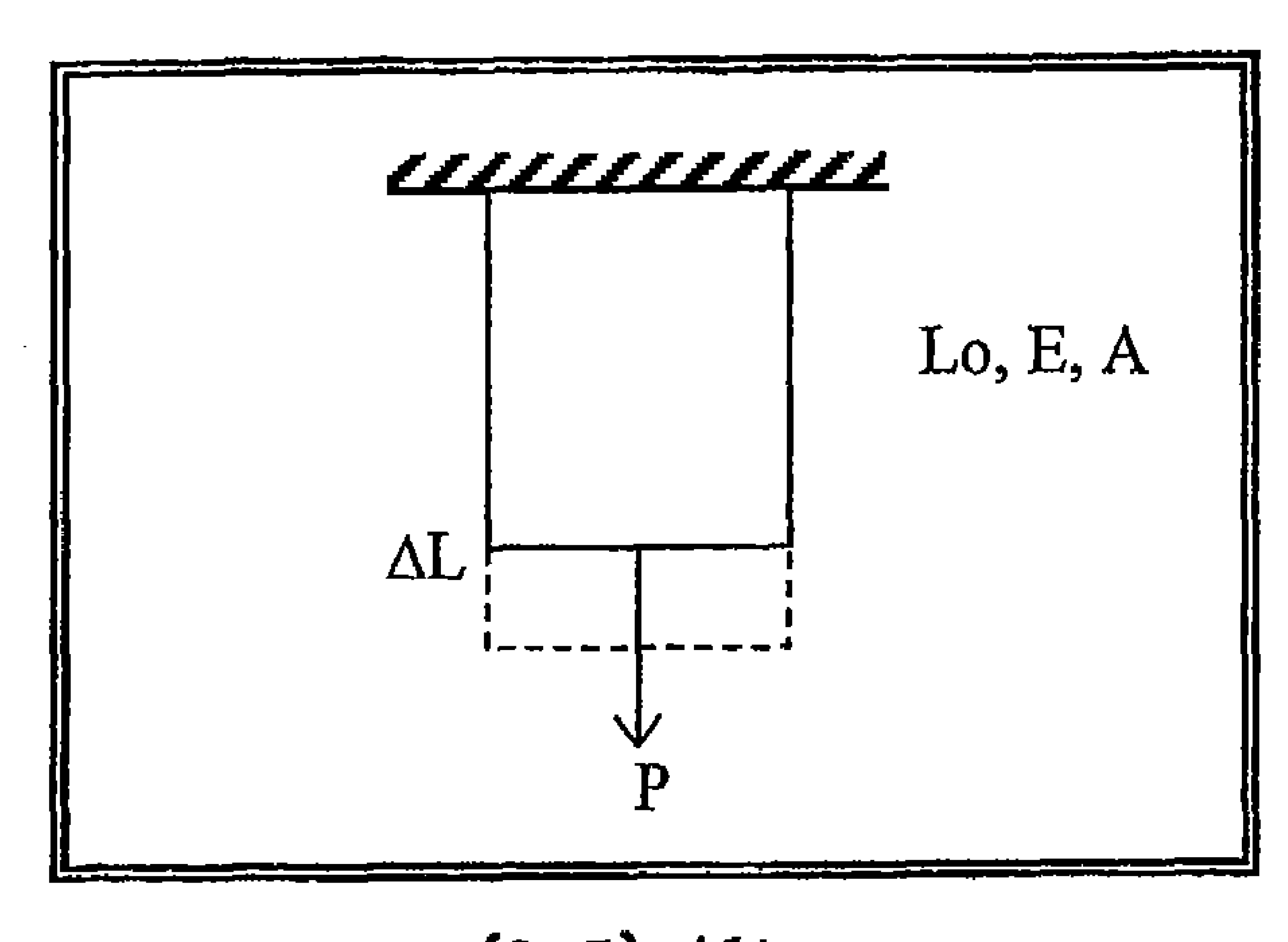
وهي صيغة مبسطة لشد محوري عندما يكون التحميل على امتداد خط مستقيم واحد أي أحادي المحور.

وبما أن $(\sigma = F/A)$ وكذلك $(\varepsilon = \Delta L/L_o)$

فإن معامل المرونة يصاغ أيضا على الشكل التالي:

$$E = \frac{FL_o}{\Delta LA} \qquad (2\text{-}3)$$

حساب الاستطالة:



شكل (2-5)

$$\in = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\sigma = E \in$$

$$\in = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{PL_o}{AE}}$$

حيث: ΔL: هي الاستطالة الطولية.

شروط تطبيق قانون الاستطالة:

1) يجب أن يكون الحمل محورياً.

2) يجب أن يكون القضيب متجانساً وذو مساحة مقطع ثابتة.

3) يجب أن لا يتجاوز الإجهاد حد التناسب.

مسائل محلولة:

(2.1) أوجد الاستطالة الكلية لقضيب مستقيم طوله (5m)، ومساحة مقطعة المستعرضة ($0.25 \times 10^{-4} m^2$) ومعامل المرونة له (200GPa)، في حالة التأثير عليه بحمل شد مقداره 2KN عند نهايتي هذا القضيب.

الحل:

$$\Delta L = FL/EA = \frac{(2\times10^3)5}{(200\times10^9)\quad(0.25\times10^{-4})} = 2\times10^{-3}m$$

(2.2) شريط صلب طوله (5m) ومقطعه المستعرض (65mm) × (15mm) احسب الاستطالة في حالة مد الشريط بكامل طوله وشده بقوة مقدارها (55N). معامل المرونة ($200GN/m^2$).

الحل:

$$A = b \times d = (15\times10^{-3})\,(65\times10^{-3}) = 9.75\times10^{-4}m^2$$

$$\Delta L = FL/EA = \frac{55\times35}{(200\times10^9)\quad(9.75\times10^4)} = 9.872\ \times10^{-6}m$$

(2.3) قضيب مستقيم ذو مقطع مستعرض منتظم معرض لقوة ضغط محوري، مساحة المقطع المستعرض للقضيب ($60mm^2$)، وطوله (4m)، إذا كان التقلص الكلي تحت تأثير حمل مقداره (30KN) تساوي (3mm)، أوجد معامل المرونة لمادة القضيب.

الحل:

$$\Delta L = (F\times L)/(E\times A) \rightarrow E = (F\times L)/(\Delta L\times A)$$

$$E = \frac{(30\times10^{3})4}{(30\times10^{-3})(60\times10^{-6})} = 666.67\times10^{9}\ N/m^{2} = 666.67\ GN/m^{2}$$

$$= 666.67\ GPa.$$

(2.4) قوة شدية مقدارها 10KN تؤثر على قضيب طوله 2m وقطره 100mm، مصنوع من الفولاذ E = 200 GPa، أوجد الاستطالة في هذا القضيب.

$$\Delta L = \frac{10\times10^{3}\times2}{\pi(0.05)^{2}\times200\times10^{9}}$$

$$= 12.73\times10^{-6} m$$

$$= 12.73\times10^{-3} mm$$

(2.5) قضيب فولاذي معامل مرونته 200GPa، ويتعرض لإجهاد شد مقداره 100MPa، أوجد مقدار الاستطالة فيه إذا علمت أن طوله يساوي 5m.

$$\in = \frac{\sigma}{E} = \frac{100\times10^{6}}{200\times10^{9}}$$

$$= 0.0005$$

$$\in = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{5} = 0.0005$$

$$\Delta L = 0.0025m$$

$$= 2.5mm$$

(2-4) معامل الأمان (Factor of Safity):

إن الأحمال الحقيقية التي تؤثر على أجزاء المواد التي تصنع منها الآلات يمكن أن تختلف كثيراً وبصورة غير ملائمة، عن تلك التي استعملت في الحسابات.

وبما أن الأجزاء والإنشاءات يجب أن تعمل بأمان يجب اتخاذ بعض الإجراءات الوقائية. ولذلك فإن الإجهادات المسموح بها، والتي تضمن التشغيل

المأمون للمكائن، يجب أن تكون أقل من الإجهادات القصوى التي يمكن أن يحدث عندها انهيار الإنشاء أو تظهر فيه تشوهات لدنة.

لذا نستخدم المعادلة التالية:

$$\sigma_{all} = \sigma_{uts} / F.S \quad \text{.........} \quad (2\text{-}4)$$

حيث أن: σ_{all} : الإجهاد المسموح به (N/m^2).

F.S : معامل الأمان

σ_{uts} : الإجهاد الأقصى التي يمكن أن تتحمله المادة (N/m^2).

ونستخدم في المعادلة السابقة الإجهاد الأقصى في حالة المواد الهشة أما في حالة المواد المرنة نستخدم إجهاد الخضوع، وذلك لأن التشوهات اللدنة (الدائمة) تظهر في المواد المرنة عند حد الخضوع.

وعلى هذا الأساس فإن معامل الأمان يستخدم لأجل أمانة وسلامة عمل الإنشاءات وأجزائها، لذا يجب أن يكون معامل الأمان أكبر من الواحد الصحيح.

ملاحظات:

- يجب أن لا يتجاوز الإجهاد الذي تتعرض له المادة الإجهاد المسموح به.
- يجب أن يكون التصميم دائماً على الإجهاد المسموح به.

أمثلة محلولة:

(2-5) ما هو الإجهاد المسموح به لتحميل قضيب مقاومته القصوى (16MPa) ومعامل الأمان له (4)؟

الحل:

$$\text{الإجهاد المسموح به } \sigma_{all} = \frac{\text{الإجهاد الأقصى } \sigma_{uts}}{\text{معامل الأمان } F.S}$$

$\sigma_{all} = 16/4 = 4$ MPa.

(2.6) ما مقدار القوة القصوى التي يمكن لعينة من الحديد قطرها (2.5cm) أن تتحملها دون أن تنار مع معامل أمان مقداره (2.5) إذا علمت أن إجهاد الخضوع للحديد (400MPa)؟.

الحل

$$\text{الإجهاد المسموح به } \sigma_{all} = \frac{\sigma_u \text{ إجهاد الخضوع}}{\text{F.S معامل الأمان}}$$

$$\sigma_{all} = \frac{400}{2.5} = 160\text{MPa}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi\left(2.5\times10^{-2}\right)^2}{4} = 4.91\times10^{-4}\,\text{m}^2$$

$$\sigma_{all} = P_{all}/A \Rightarrow P_{all} = \sigma_{all}\times A$$

$$= (160\times10^6)\,(4.91\times10^{-4})$$

$$= 78.56\ \text{KN}$$

(2-5) نسبة بويسون: (Poisson's Ratio)

إذا تعرض قضيب لقوة شد بسيطة، يكون هناك زيادة في طول القضيب في نفس اتجاه القوة ونقصان في البعد العمودي على اتجاه هذه القوة. النسبة بين الإنفعال العرضي إلى الإنفعال الطولي باتجاه المحور تعرف على أنها نسبة بويسون ويرمز لها بالرمز (ν).

إذا رمزنا للإنفعال الطولي (ε_x) والإنفعال العرضي أو الجانبي (ε_y)، وكان الإنفعال الطولي على المحور (X):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta X}{X_o} \quad \text{.................................} \quad (2\text{-}5)$$

والانفعال الجانبي على المحور (Y):

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta Y}{Y_o} \quad \text{......} \quad (2\text{-}6)$$

فإن نسبة بويسون تعطى بالعلاقة التالية:

$$\text{نسبة بويسون } (\nu) = \left| \frac{(-) \text{ الانفعال العرضي}}{\text{الانفعال الطولي}} \right| = \left| \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| \quad \text{......} \quad (2\text{-}7)$$

مسائل محلولة:

(2.7) قضيب مربع من الحديد طول ضلعه (60mm) وطوله (1.5m) معرض لقوة شد محوري مقدارها (300KN)، أوجد مقدار التغير في البعد الجانبي نتيجة تأثير هذه القوة، إذا علمت أن (E=200GPa) و(ν=0.3)

الحل:

$A = (60\times10^{-3})\ (60\times10^{-3}) = 3.6 \times 10^{-3}\ m^2$

$\sigma = F/A = (300 \times 10^3) / (3.6 \times 10^{-3}) = 83.33\ MPa$

$E = \sigma / \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \sigma / E = (83.33 \times 10^6) / (200 \times 10^9)$

$= 4.167 \times 10^{-4}$

$\nu = |-\varepsilon_y / \varepsilon_x| \rightarrow -\varepsilon_y = \varepsilon_x \times \nu = (4.167 \times 10^{-4}) \times 0.3$

$\varepsilon_y = -1.25 \times 10^{-4}$

$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta Y}{Y} \rightarrow \Delta Y = \varepsilon_y \times \nu = (4.167 \times 10^{-4}) \times 0.3$

$\Delta Y = -7.5 \times 10^{-6} m = -7.5 \times 10^{-3} mm$

$\Delta Y = Y_2 - Y_1 \Rightarrow Y_2 = \Delta Y + Y_1$

$Y_2 = (-7.5 \times 10^{-3}) + 60 = 59.9925 mm$

(2.8) جسم طوله (0.6m) وقطره (15mm) تؤثر عليه قوة مقدارها (15KN) فكان مقـدار التغـير في الطـول (0.35mm) وكـان نقصـان القطـر بمقـدار (0.002mm) أوجد نسبة بويسون.

الحل:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta X}{X_o} = \frac{0.35\times10^{-3}}{0.6} = 5.83\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\Delta Y}{Y_o} = \frac{-0.002}{15} = -1.33\times10^{-4}$$

$$\nu = \left|\frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{-1.33\times10^{-4}}{5.03\times10^{-4}}\right| = 0.23$$

(2.9) قضيب قطره 100mm تؤثر عليه قوة شد محورية مقدارها 100KN، إذا علمت أن طول القضيب 2m وقد حدث فيه تمدد مقداره 1mm، وأنّ نسبة بوسون $\nu = 0.3$ ، أوجد القطر النهائي للقضيب.

$$\epsilon_x = \frac{L_f - L_o}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

$$= \frac{1\times10^{-3}}{2} = 500\times10^{-6}$$

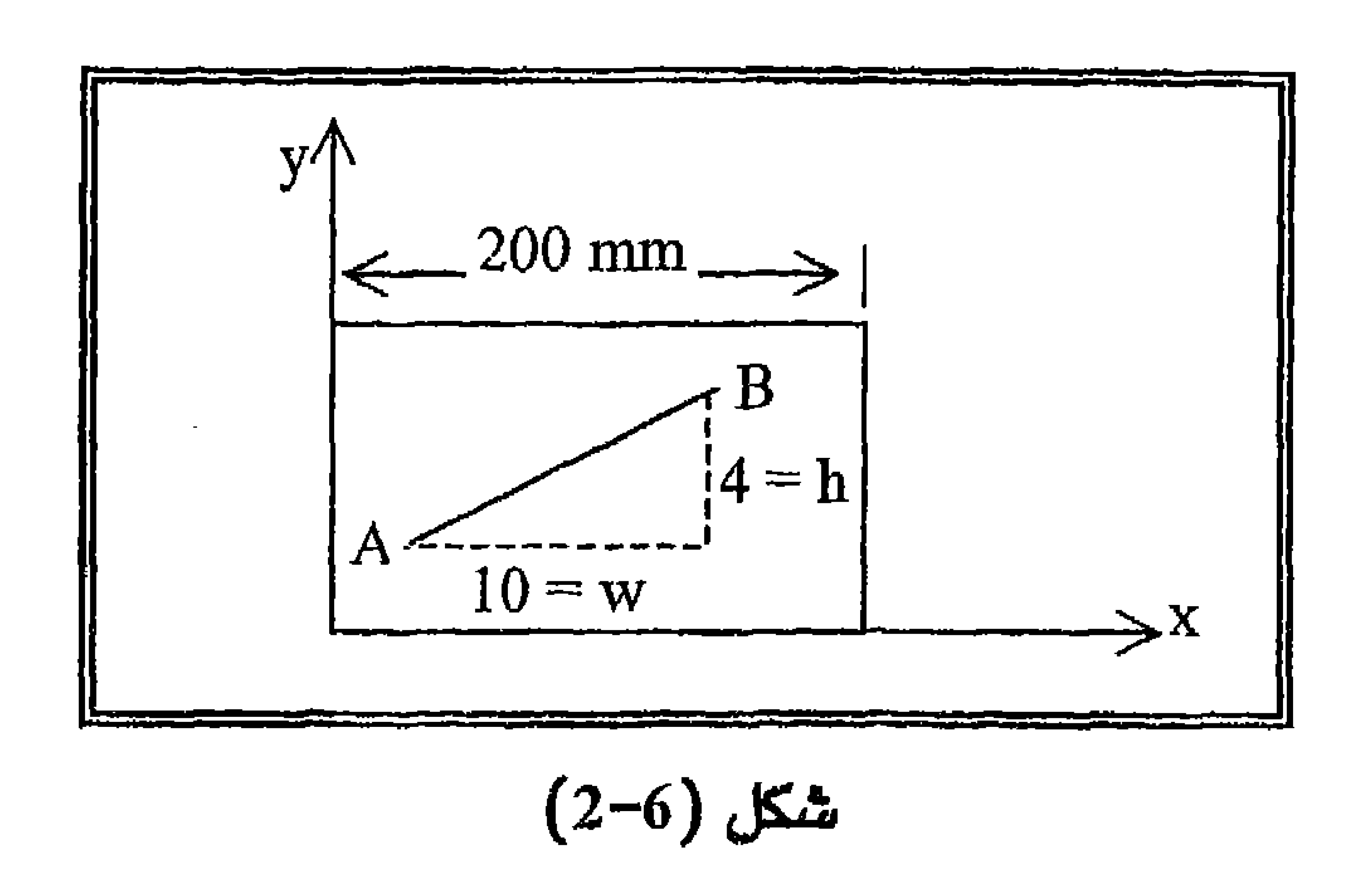
$$\nu = \frac{-\epsilon_y}{\epsilon_x} = 0.3 = \frac{-\epsilon_y}{500\times10^{-6}}$$

$$\epsilon_y = -150\times10^{-6} = \frac{D_f - D_o}{D_o}$$

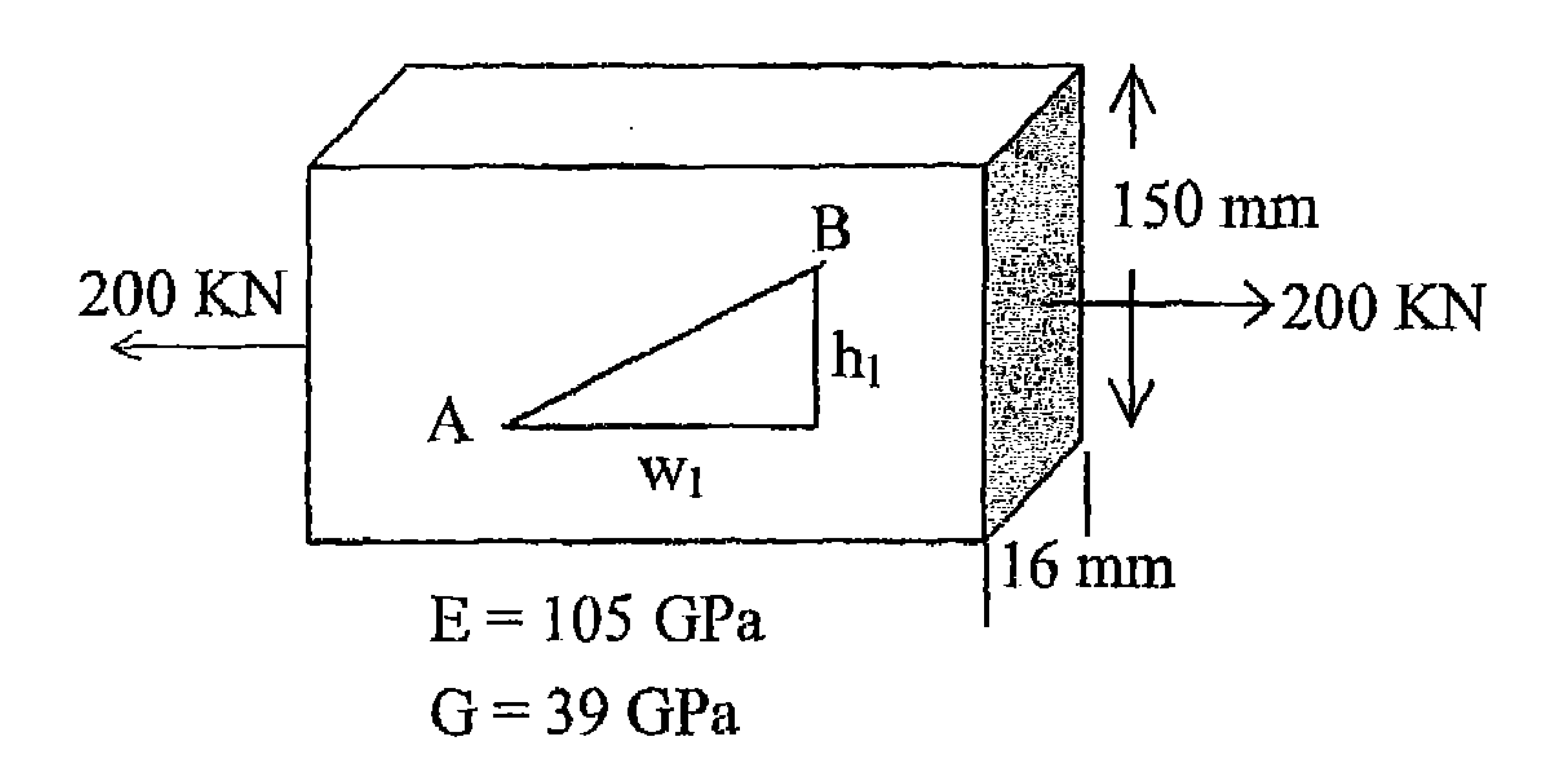
$$= \frac{D_f - 100}{100}$$

$$D_f = 99.985\text{mm}$$

(2.10) في الشكل التالي أوجد ميل الخط AB بعد عملية التحميل:



شكل (2-6)



$$h_1 = y\left(1+\epsilon_y\right),\ w_1 = 10\left(1+\epsilon_x\right)$$

الميل $= \text{Slope} = \dfrac{h_1}{w_1}$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad , \quad \epsilon_y = -\nu\,\epsilon_x = -\nu\,\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = 200\times10^3 \,/\, \left(150\times10^{-3}\right)\left(6\times10^{-3}\right)$$

$$= 2.22\times10^8 \text{ Pa}$$

$$\epsilon_x = \frac{2.22\times10^8}{105\times10^9} = 2.1\times10^{-3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2\sigma} - 1$$

$$= 3.46 \times 10^{-1} = 0.346$$

$$h_1 = 4(1 - \nu \in_x) = 4\left(1 - 3.46 \times 2.1 \times 10^{-3}\right)$$

$$= 3.997 \text{ mm}$$

$$w_1 = 10\ (1 + \in_x) = 10\ \left(1 + 2.116 \times 10^{-3}\right)$$

$$= 10.0021 \text{ mm}$$

$$\text{Slope} = \frac{3.997}{10.0021} = 0.3996$$

(2-6) طاقة الانفعال:(Strain Energy)

لوحظ من خلال فحص الشاد على قضيب من الحديد وأثناء تمدد العينة تحت الزيادة التدريجية بالحمل، أن هناك شغلا أو طاقة تم بذلها على هذا القضيب، وسيتم انتقال جزئي أو كلي لهذا الشغل إلى طاقة مختزنة داخل القضيب إذا كان هذه الإجهادات والإنفعالات تقع في حدود المرونة، تسمى هذه الطاقة المختزنة بطاقة الإنفعال. ويمكن استعادة هذه الطاقة بعد زوال الأحمال المؤثرة على القضيب:

ويعطى التغير في طاقة الانفعال بالعلاقة التالية:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon\Delta V \qquad \text{.......... (2-8)}$$

حيث:

ΔV : التغيّر في الحجم.

ΔU: التغيّر في طاقة الانفعال.

أمّا كثافة طاقة الانفعال فتعطى بالعلاقة:

$$U = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}$$

حيث أن:

U: طاقة الإنفعال (N.m أو Kg.cm).

F: الحمل المسلط على العينة (N أو Kg).

L: طول العينة (m أو cm).

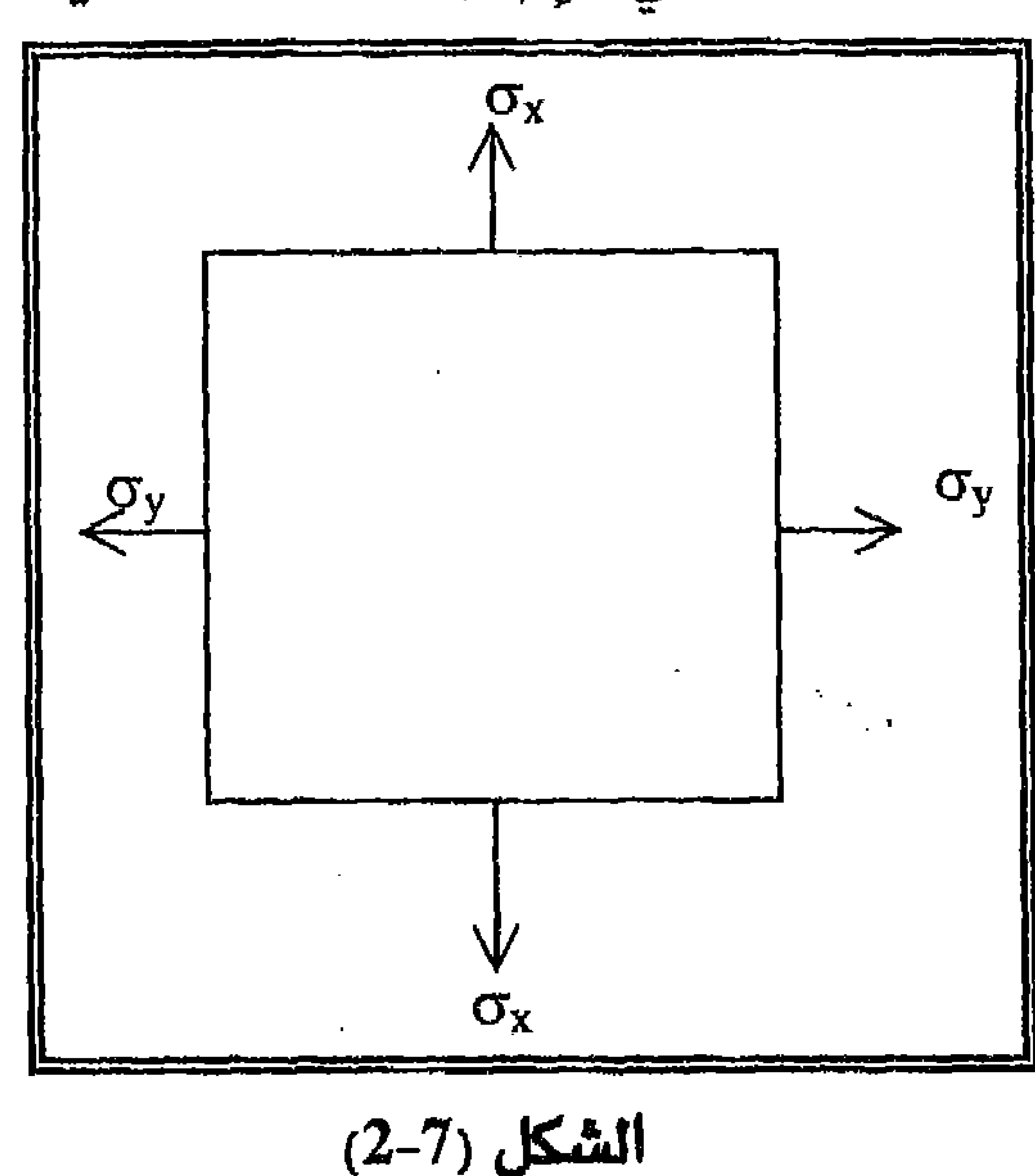
A: مساحة مقطع العينة (m^2 أو cm^2).

E: معامل المرونة لمادة معينة (N/m^2 أو Kg/cm^2).

(2-7) العلاقة بين التشوهات والإجهادات في حالتي الإجهادات السطحية والحجمية (تعميم قانون هوك):

نحدد التشوهات ε_X، ε_Y في اتجاهات الإجهادات الرئيسية في حالة الإجهاد السطحي الشكل (2-5)، ولأجل هذا نستخدم قانون هوك لحالة الإجهاد الوحيد المحور ونسبة بويسون. وبتأثير الإجهاد σ_x وحده فإن الاستطالة النسبية الدراسية تساوي:

$$\varepsilon_{xx} = \sigma_x / E$$



الشكل (2-7)

وفي نفس الوقت، فإن التقلص النسبي في الاتجاه الأفقي يساوي:

$$\varepsilon_{yx} = -\nu\sigma_x / E$$

وبتأثير الإجهاد σ_y وحده، تحدث في الاتجاه الأفقي استطالة تساوي:

$$\varepsilon_{yy} = \sigma_y / E$$

وفي الاتجاه الرأسي، تقلص يساوي:

$$\varepsilon_{xy} = -\nu \sigma_y / E$$

وبجمع التشوهات، نحصل على:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} = \sigma_x / E \qquad (2\text{-}9\text{-}a)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yx} = \sigma_y / E \qquad (2\text{-}9\text{-}b)$$

إن هاتين الصيغتين، تعبران عن تعميم قانون هوك لحالة الإجهادات السطحية.

وإذا كان التشوهان σ_x، σ_y معروفين، فبحل المعادلتين (2-9-a) و(2-9-b) بالنسبة إلى الإجهادات σ_x، σ_y نحصل على الصيغتين التاليتين:

$$\sigma_x = E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) / (1 - \nu^2) \qquad (2\text{-}10\text{-}a)$$

$$\sigma_y = E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) / (1 - \nu^2) \qquad (2\text{-}10\text{-}b)$$

وبطريقة مشابهة، ففي حالة الإجهاد الحجمي، عندما يكون كل من الإجهادات الرئيسية الثلاثة σ_x، σ_y، σ_z غير مساوية للصفر، نحصل على الصيغة التالية:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad (2\text{-}11\text{-}a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \qquad (2\text{-}11\text{-}b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad (2\text{-}11\text{-}c)$$

إن معادلات الصيغة (2-11) تمثل قانون هوك العام لحال الإجهاد الحجمي، إن التشوهات ε_x, ε_y, ε_z عندما تكون في اتجاهات الإجهادات الرئيسية تسمى بالتشوهات الرئيسية. وبمعرفة ε_x, ε_y, ε_z يمكن حساب تغير الحجم عند التشوه.

نأخذ مكعبا. أبعاد $1\times1\times1cm$، إن حجمه قبل التشوه $V_o= 1cm^3$ أما حجمه بعد التشوه فيساوي:

$$V' = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$$
$$= (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$
$$= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{.......... (2-12)}$$

والتغير النسبي للحجم (v) هو:

$$v = \Delta V / V_o = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \text{.......... (2-13)}$$

ونعوض هنا عن القيم $\varepsilon_z, \varepsilon_y, \varepsilon_x$ من الصيغة (2-11) فنحصل على:

$$v = (1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/E \quad \text{.......... (2-14)}$$

وبما أن حواصل ضرب (ε) هي مقادير متناهية في الصغر مقارنة مع (ε) نفسها لذلك فإننا نهملها، ويعبر عن التغير بالحجم بالصيغة التالية:

$$\Delta V = V' - V_o$$
$$\frac{\Delta V}{V_o} = (1-2\nu)\varepsilon_x \quad \text{.......... (2-15)}$$

أمثلة محلولة:

(2.11) قضيب مربع من الألمنيوم طول ضلعه (100mm)، وطوله (300mm) محمل بحمل شد محوري، عند نهاية التجربة وجد أن الانفعال باتجاه الحمل (0.001) احسب حجم القضيب عند تأثير الحمل، اعتبر أن نسبة بويسون (0.3).

الحل:

$$V_o = 100 \times 100 \times 300 = 3 \times 10^6 mm^3$$
$$\Delta V = (1-2\nu)\varepsilon_x \times V_o$$
$$= [1 - (2 \times 0.3)] \times (0.001) \times (3 \times 10^6) = 1200 mm^3$$

$$V' = \Delta V + V_o$$

$$=1200 + (3 \times 10^6) = 3001200 mm^3$$

(2.12) يراد الإجهادان، σ_y σ_x إذا كانت التشوهات ($\varepsilon_x = 0.0011$)، ($\varepsilon_y = -0.0009$) حيث أن معامل المرونة ($E=2\times10^5 MPa$) و($v=0.33$) .

الحل:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \times \left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$

$$= \frac{2\times10^5}{\left[1-(0.33)^2\right]} \times \left[0.0011 + (0.33 \times -0.0009)\right] = 180.22 MPa$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \times \left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$$

$$= \frac{2\times10^5}{\left[1-(0.33)^2\right]} \times \left[-0.0009 + (0.33 \times -0.0011)\right]$$

$$= -120.53 MPa.$$

(2-8) الإجهادات المركبة:

تكون هذه الإجهادات إما في القضبان المركبة وهي القضبان المصنوعة من مادتين مختلفتين وأكثر، وإما أن تكون أيضا إجهادات عمودية وحرارية تؤثر على نفس القضيب (وهذا ما سنعرضه في الوحدة القادمة).

سنعتمد على الطريقة التراكمية لحل هذا النوع من المسائل ، وسنرمز إلى مجموع التغيرات (التشوهات) التي تحدث على طول القضيب بالرمز(δ) أو (ΔL_T) وتكون مساوية لحاصل جمع التغير الذي حدث للمقطع الأول من القضيب، والمقطع الثاني وهكذا،

ملاحظة:

في حالة الأجسام المركبة من مواد مختلفة ومقاطع مختلفة يتم تطبيق مبدأ التراكب (Super Position Principle).

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i L_i}{A_i E_i}$$

$$\delta = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \dots\dots\dots + L_n \qquad \dots\dots(2\text{-}16)$$

$$\delta = \frac{F_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{F_2 L_2}{E_2 A_2} + \frac{F_3 L_3}{E_3 A_3} + \dots\dots\dots + \frac{F_n L_n}{E_n A_n} \qquad \dots\dots(2\text{-}17)$$

هذا إذا كان القضيب مكون من مادة واحدة ولكن الاختلاف أو التغير يكون في الأطوال أو مساحات المقطع أو توزيع الأحمال على امتداد طوله. أما إذا كان القضيب من مادتين مختلفتين وكان الحمل الكلي (P) المسلط على هذا القضيب واحدا فإن الإجهادات والانفعالات تحسب على الشكل التالي:

إذا رمزنا للمادة الأولى المكون منها القضيب بالرقم (1).

وإذا رمزنا للمادة الثانية المكون منها القضيب بالرقم (2) فإن:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \qquad \sigma_1 / E_1 = \sigma_2 / E_2$$

$$P = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \qquad \dots\dots(2\text{-}18)$$

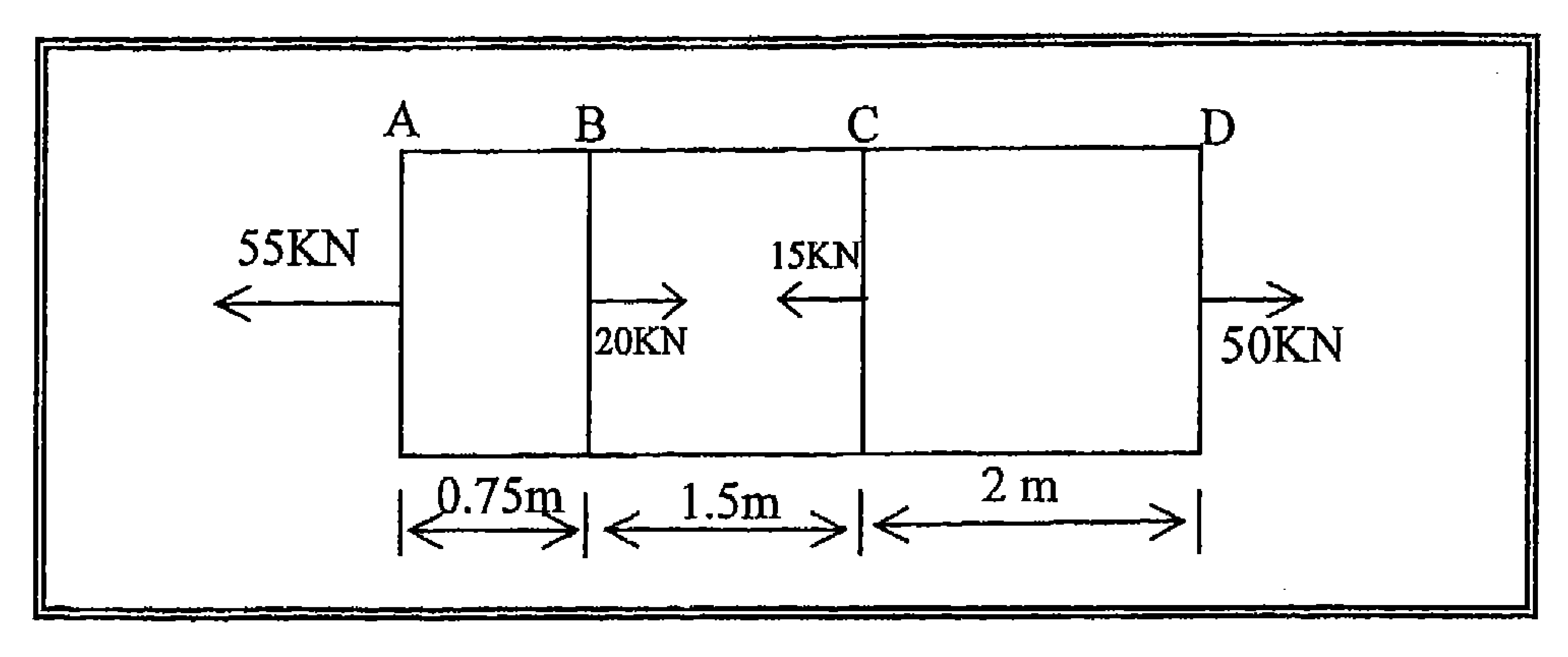
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 E_1}{E_2} \quad , P = \frac{\sigma_2 E_2}{E_2} A_1 + \sigma_2 A_2$$

$$P = \sigma_2 \left[\left(\frac{E_1}{E_2} \right) A_1 + A_2 \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\left[\left(\frac{E_1}{E_2} A_1 \right) + A_2 \right]} \qquad \dots\dots(2\text{-}19\text{-}a)$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{\left[\left(\frac{E_2}{E_1} A_2 \right) + A_1 \right]} \qquad \dots\dots(2\text{-}19\text{-}b)$$

(2.13) قضيب من الصلب ذو مقطع مستعرض مساحته ($600mm^2$) حمل بالقوى الموضحة بالشكل (2-10-a)، احسب الاستطالة الكلية للقضيب إذا علمت أن ($E = 200GPa$).



الشكل (2-10)

الحل:

A B
55KN 55KN
0.75m

(1)

A B C
55KN 35KN
20KN
0.75 m 1.5m

(2)

A B C D
55KN 15 KN 50KN
20 KN
0.75 m 1.5 m 2 m

(3)

بما أن القضيب كله في حالة اتزان لذا فإن أي جزء من أجزائه يكون في حالة اتزان.

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = -55 + 20 - 15 + 50 = 0$$

محصلة القوى على الجزء (AB) الشكل (1) مقدارها (55KN) حيث وضعنا قوة في الطرف الآخر لحصول الاتزان، وتكون القوة المؤثرة على طول (0.75m) قوة شد، وتحسب الاستطالة في هذا الجزء كالتالي:

$$\Delta L_1 = \frac{F_{AB} L_{AB}}{AE} = \frac{(55 \times 10^3)(0.75)}{(200 \times 10^9)(600 \times 10^{-6})} = 3.44 \times 10^{-4} m$$

وبأخذ محصلة القوى على المقطع (BC) الشكل (2) من جهة اليسار إلى اليمين تكون مساوية (35KN)، وتكون الاستطالة في هذا الجزء :

$$\Delta L_2 = \frac{F_{BC} L_{BC}}{AE} = \frac{(35 \times 10^3)(1.5)}{(200 \times 10^9)(600 \times 10^{-6})} = 4.375 \times 10^{-4} m$$

وبالمثل نقوم بحساب الاستطالة على الجزء (CD) شكل (3) فتكون:

$$\Delta L_3 = \frac{F_{CD} L_{CD}}{AE} = \frac{(50 \times 10^3)(2)}{(200 \times 10^9)(600 \times 10^{-6})} = 8.33 \times 10^{-4} m$$

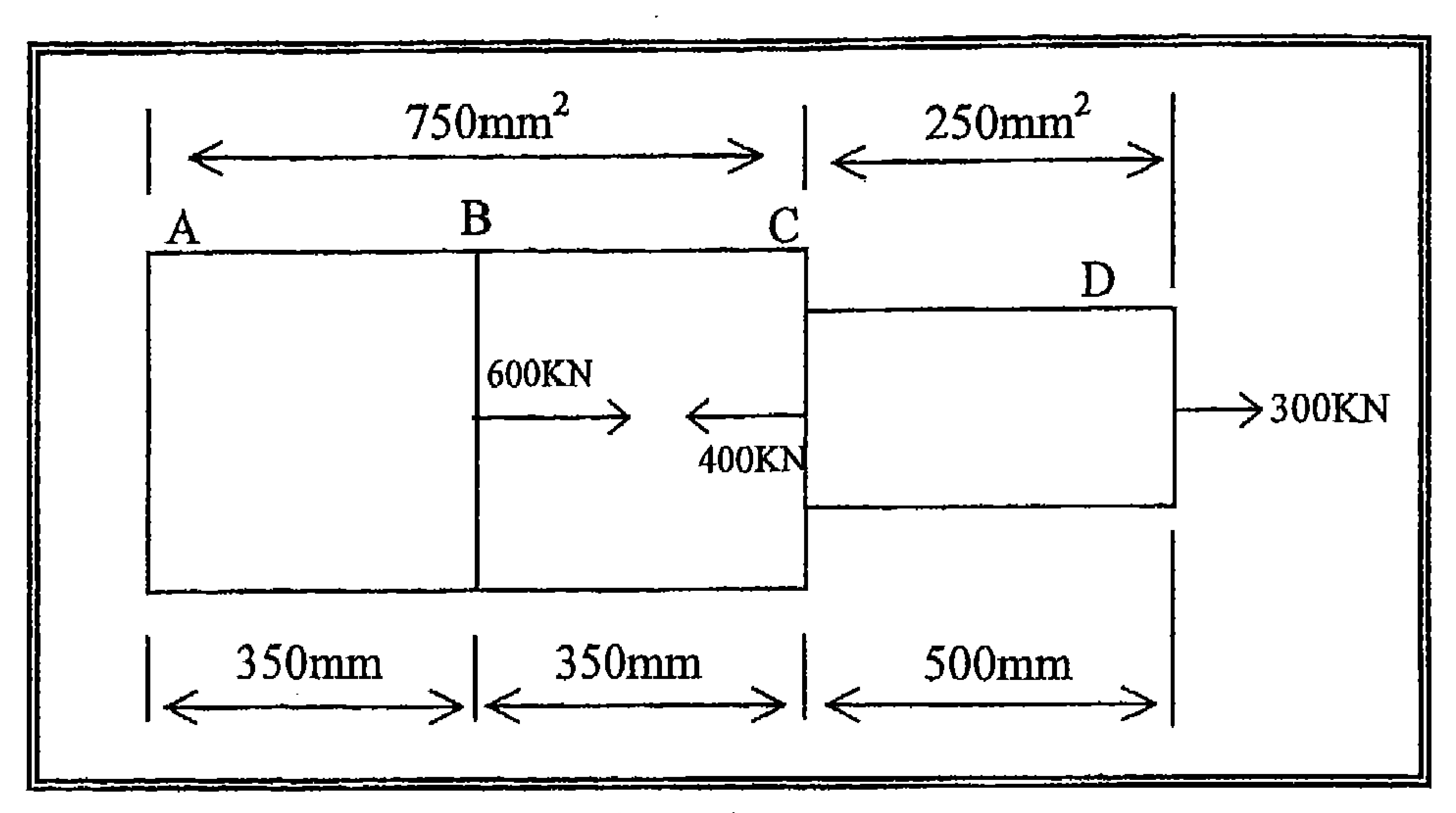
وبالتالي فإن الاستطالة الكلية تكون:

$$\delta = \Delta L_T = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$

$$= (3.44 \times 10^{-4}) + (4.375 \times 10^{-4}) + (8.333 \times 10^{-4})$$

$$= 1.62 \times 10^{-3} m$$

(2.14) أوجد التشكيل (الاستطالة الكلية) الحادث في القضيب في الشكل (2-11) والمصنوع من مادة الفولاذ إذا علمت أن ($E=200\ GN/m^2$).



شكل (2-11)

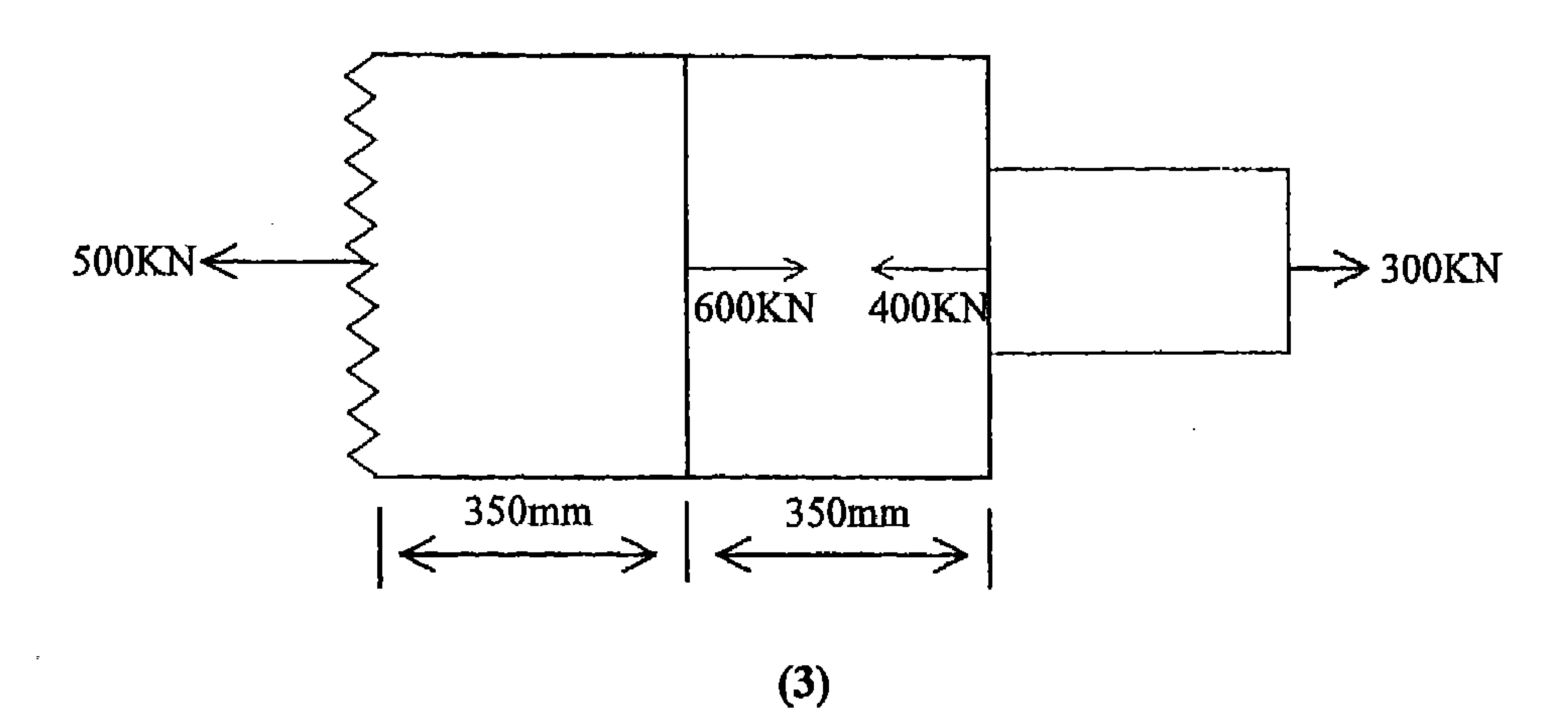
الحل:

C
D
300KN
300KN
500mm

(1)

B
C
D
100KN
400KN
300KN
350mm
500mm

(2)



(3)

نبدأ أولا بإيجاد رد الفعل عند التثبيت (A):

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 300 - 400 + 600 - R = 0$$

$$R = 300 - 400 + 600 = 500KN$$

نأخذ القطعة من اليمين إلى اليسار ويكون أولا في الجزء (CD) ونحسب الاستطالة به:

$$\Delta L_1 = \frac{F_1 L_1}{EA_1} = \frac{\left(300 \times 10^3\right)\left(500 \times 10^{-3}\right)}{\left(200 \times 10^9\right)\left(250 \times 10^{-6}\right)} = 3 \times 10^{-3} m$$

نجد أن محصلة القوى (BC):

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 300 - 400 = -100KN$$

وبما أن القوة بإشارة سالب، إذا فإن القوة هي ضغط وبالتالي فإن التشكيل الحادث سيكون تقلصا في هذا الجزء:

$$\Delta L_2 = \frac{F_2 L_2}{AE_2} = \frac{\left(-100 \times 10^3\right)\left(350 \times 10^{-3}\right)}{\left(200 \times 10^9\right)\left(600 \times 10^{-6}\right)} = -0.233 \times 10^{-3} m$$

نحسب محصلة القوى في الجزء AB:

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 300 - 400 + 600 = 500KN$$

فتكون الاستطالة في هذا الجزء:

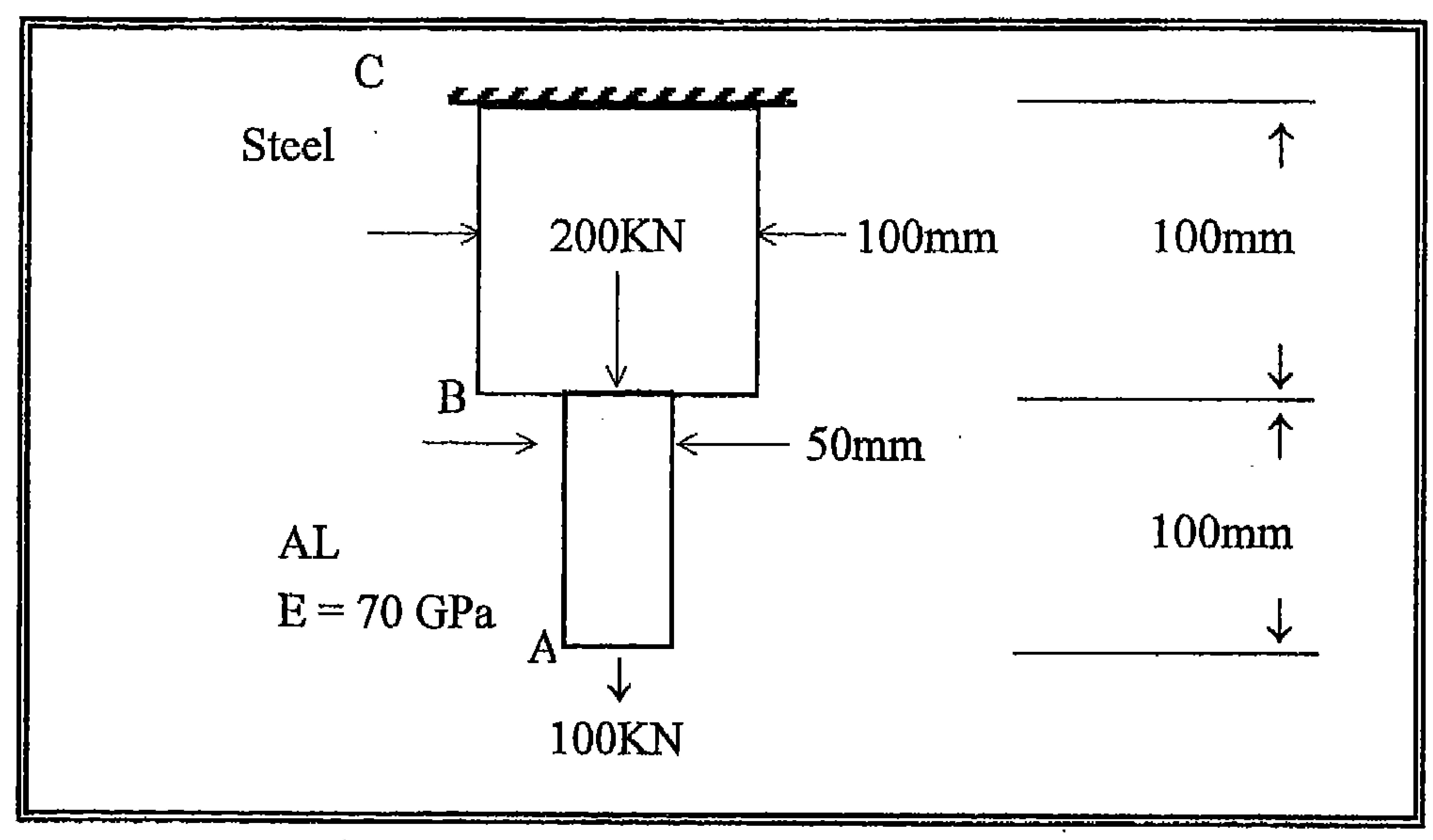
$$\Delta L_3 = \frac{F_3 L_3}{AE_3} = \frac{\left(500 \times 10^3\right)\left(350 \times 10^{-3}\right)}{\left(200 \times 10^9\right)\left(750 \times 10^{-6}\right)} = 1.167 \times 10^{-3} m$$

فبالتالي يكون التشكيل الكلي الحاصل على كامل القضيب هو:

$$\Delta L_T = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$
$$= (3-0.233+1.167) \times 10^{-3} = 3.933 \times 10^{-3} m$$

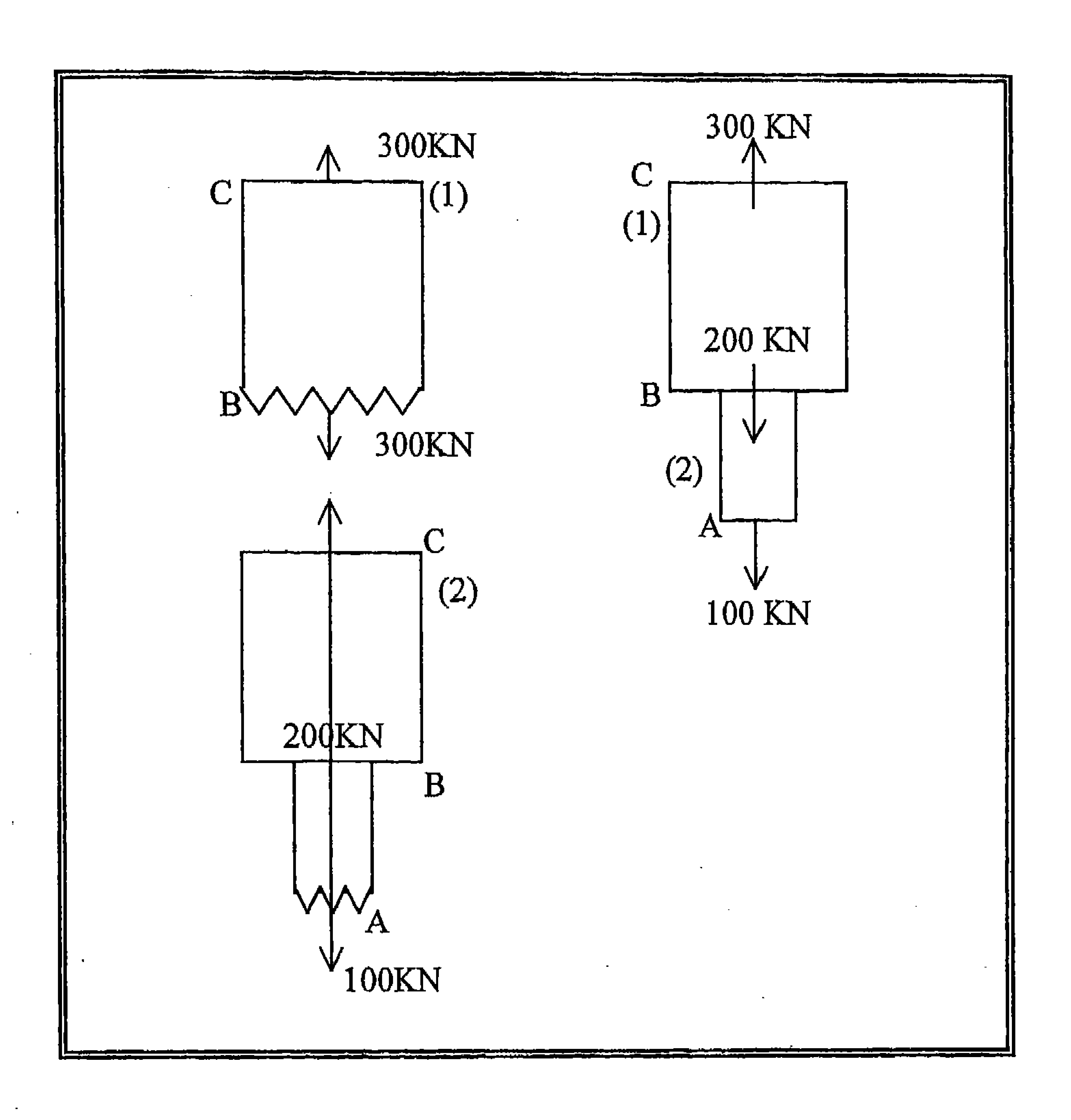
أمثلة محلولة:

(2.15) أوجد التمدد (الاستطالة) الكلية عند النقطة A.



شكل (2-8)

الحل: نرسم مخطط الجسم الحي:



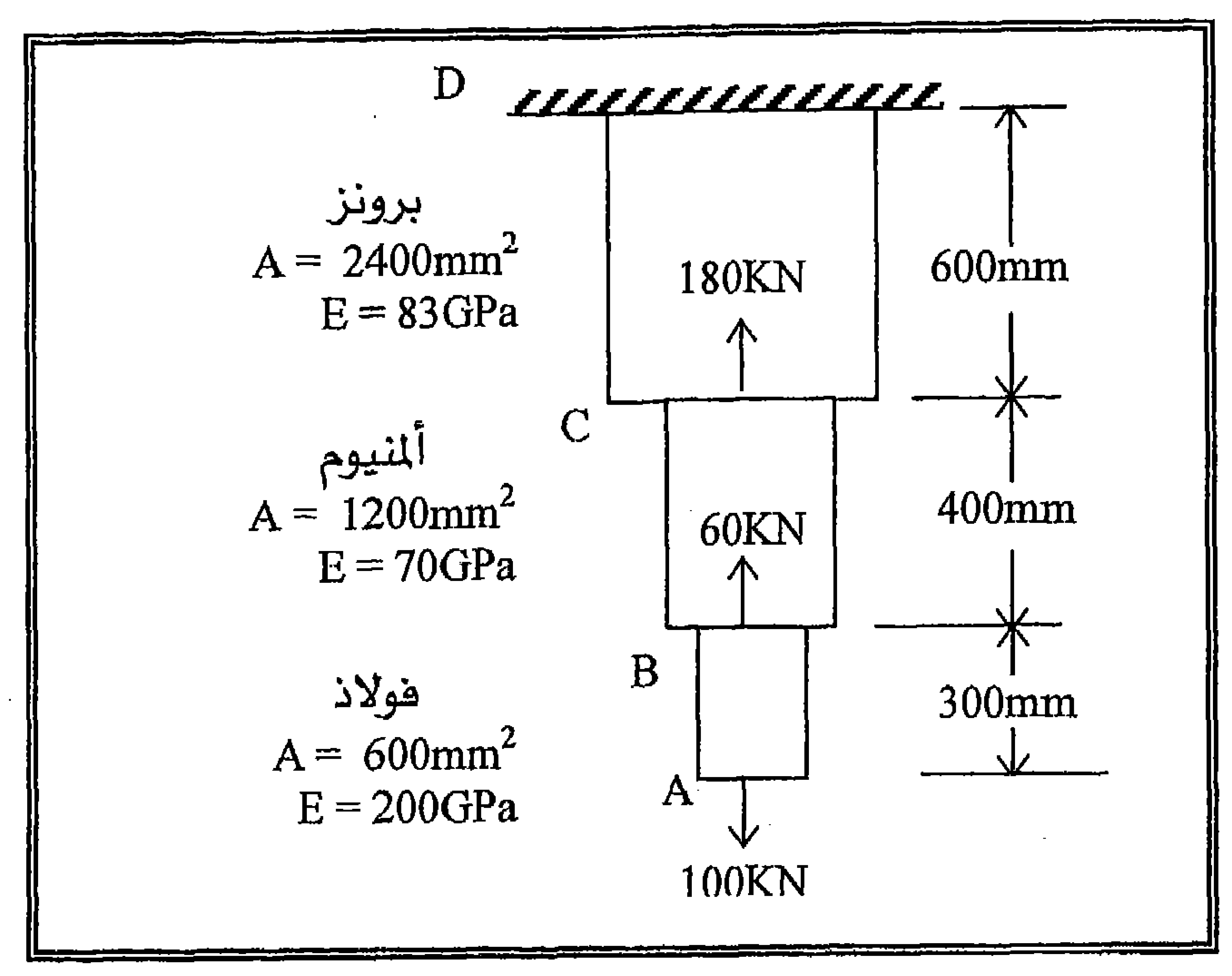
$SA = \delta_{B/C} + \delta_{A/B}$

$$= \frac{300 \times 10^3 \times 0.1}{\pi (0.05)^2 \times 200 \times 10^9} + \frac{100 \times 10^3 \times 0.1}{\pi (0.025)^2 \times 70 \times 10^9}$$

$= 91.86 \times 10^{-6} m$

$= 91.86 \times 10^{-3} mm$

(2.16) أوجد التمدد (الاستطالة) الكلي عند النقطة B.

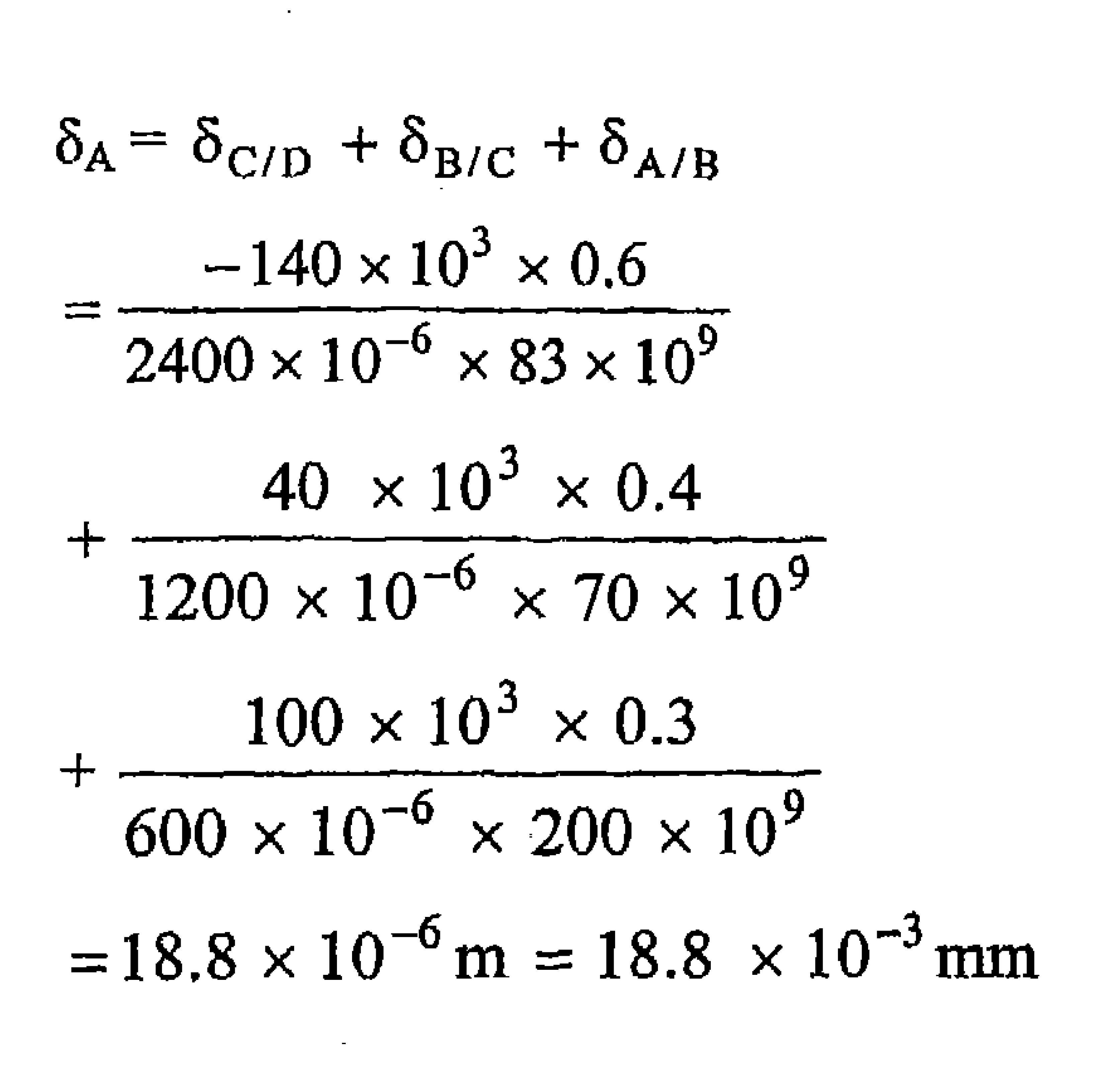


شكل (9-2)

الحل: نرسم مخطط الجسر الحر:

D 140KN
(1)
180KN
C
(2)
60KN
B
(3)
A
100KN

140 KN
D (1)
C
140KN
140KN
D
(2)
180KN
C
B
40KN



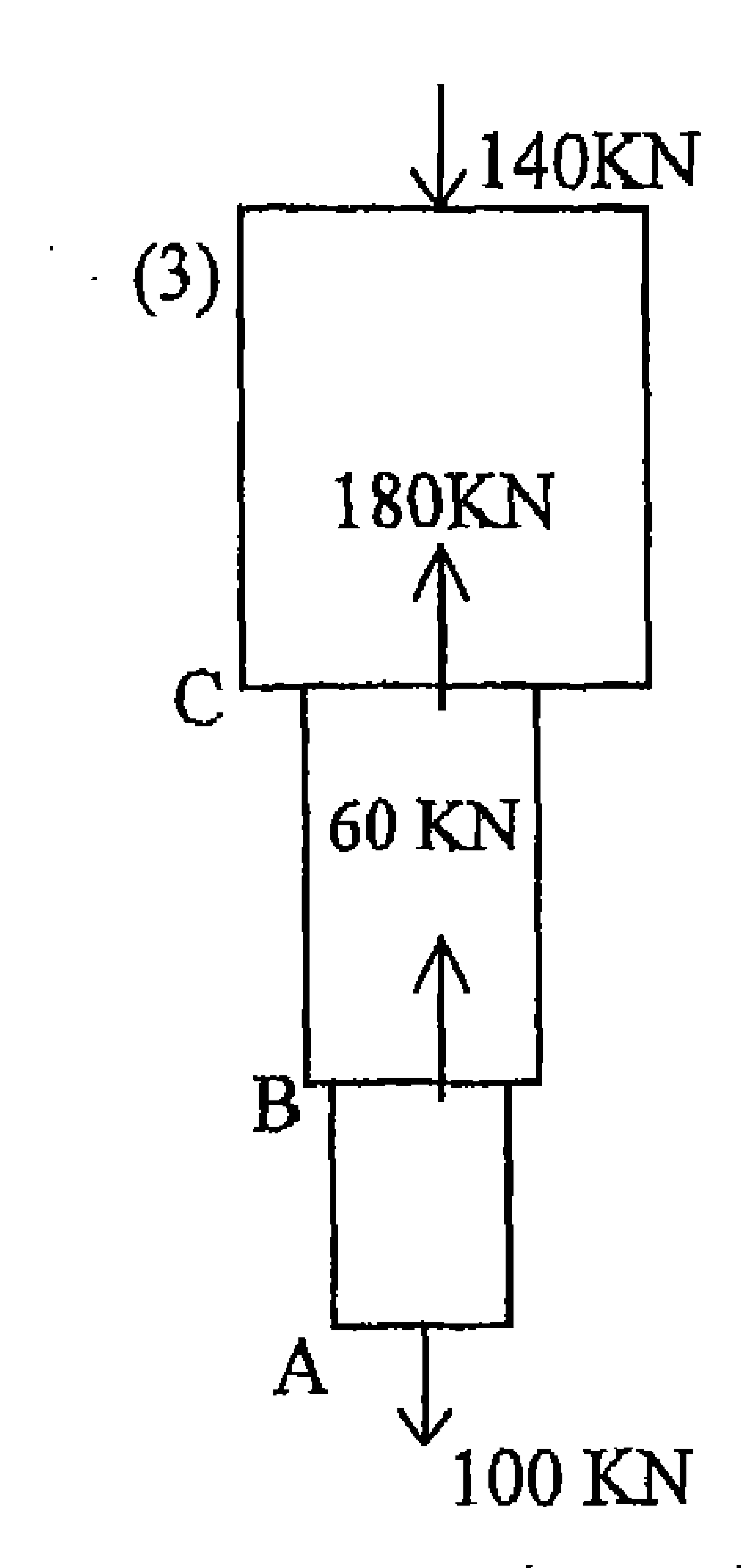
$$\delta_A = \delta_{C/D} + \delta_{B/C} + \delta_{A/B}$$

$$= \frac{-140 \times 10^3 \times 0.6}{2400 \times 10^{-6} \times 83 \times 10^9}$$

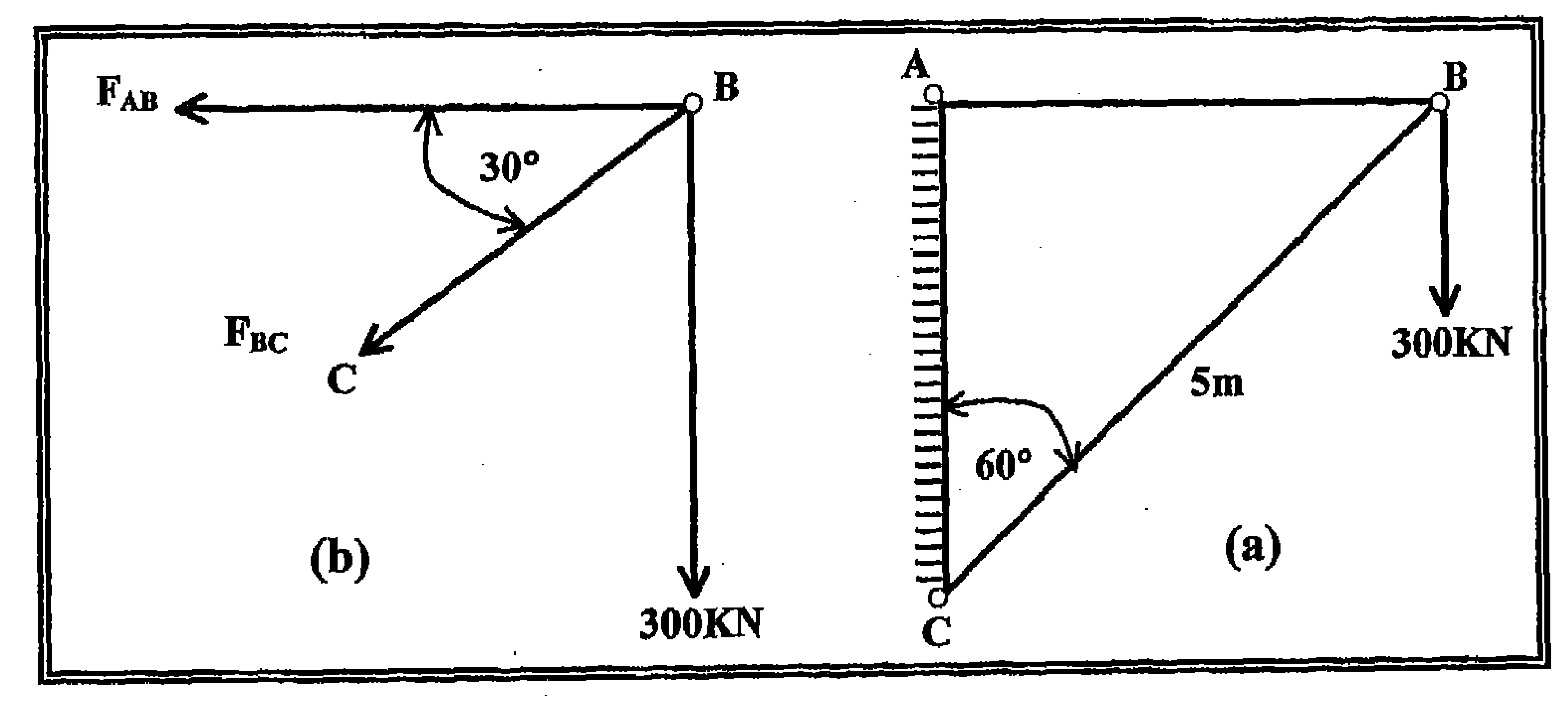
$$+ \frac{40 \times 10^3 \times 0.4}{1200 \times 10^{-6} \times 70 \times 10^9}$$

$$+ \frac{100 \times 10^3 \times 0.3}{600 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9}$$

$$= 18.8 \times 10^{-6}\,m = 18.8 \times 10^{-3}\,mm$$



(2.17) القضيبان (AB) و(BC) يتصلان اتصالا مفصليا عند كل نهاية ويحملان حملا مقداره (300KN) موضحا في الشكل (2-12-a)، المعدن من الحديد الزهر الملدن له نقطة خضوع تساوي (350MPa)، معاملات الأمان للأعضاء في حالة الشد تساوي (2.5) وللأعضاء في حالة الضغط (4)، احسب مساحة المقطع المطلوبة لهذان القضيبان، وكذلك مقدار التشكل (الاستطالة) الحاصل لهما إذا علمت أن (E=200GPa).



الشكل (2-12)

الحل:

الشكل (2-12-b) مخطط الجسم الحر للمفصل (B) وبافتراض أن القوة المجهولة هي قوة شد، وباستخدام طريقة العقد من الاستاتيكيا لإيجاد المجاهيل:

$$+\uparrow \sum F_y = O, \quad -300 - F_{BC} \sin 30 = 0$$

$$F_{BC} = -300 / \sin 30 = -600KN$$

بما أن الإشارة السالبة، إذ انعكس اتجاه القوة، فتكون القوة، على القضيب (BC) مساوية ل(600KN) وتكون ضغط.

نحسب بالمثل القوة على القضيب (AB):

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = O, \quad 600 \cos 30 - F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = 600 \cos 30 = 519.6KN$$

والاتجاه المفروض صحيح فتكون القوة على القضيب (AB) في حالة شد من معادلة معامل الأمان نحسب مقدار الإجهاد بالمسموح به لكل من المضلع (AB) و(BC):

$$(AB): \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} = \frac{350}{2.5} = 140MPa$$

وهو الإجهاد المسموح به على القضيب (AB).

$$(BC): \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{F.S} = \frac{350}{4} = 87.5MPa$$

وهو الإجهاد المسموح به على القضيب (BC):

نقوم الآن بحساب المساحة المطلوبة لكل من القضيب (AB) و(BC):

$$\sigma_{all} = F / A \Rightarrow A = F / \sigma_{all}$$

$$A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{AB}} = \frac{519.6 \times 10^3}{140 \times 10^6} = 3.71 \times 10^{-3} m^2$$

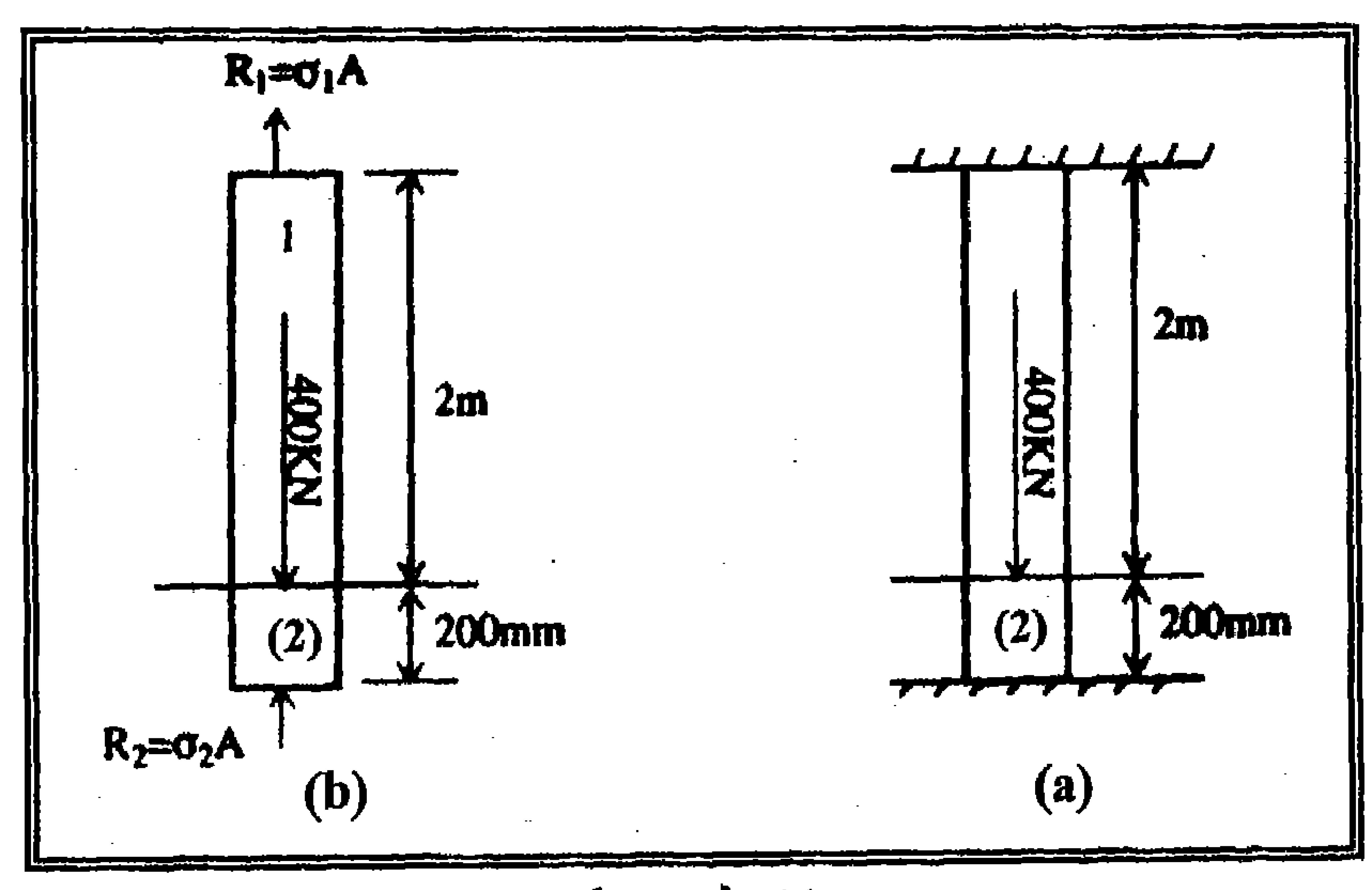
$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma_{BC}} = \frac{600 \times 10^3}{87.5 \times 10^6} = 6.86 \times 10^{-3}\,m^2$$

نقوم الآن بحساب مقدار التشكل على كل من القضيبين، ويكون عبارة عن استطالة في القضيب (AB) لأنه معرض لقوة شد، ويكون عبارة عن تقلص في القضيب (BC) لأنه معرض لقوة ضغط:

$$\Delta L_{AB} = \frac{F_{AB} A_{AB}}{EA_{AB}} = \frac{(519.6 \times 10^3)(4)}{(200 \times 10^6)(3.71 \times 10^{-3})} = 2.8 \times 10^{-3}$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{F_{BC} A_{BC}}{EA_{BC}} = \frac{(600 \times 10^3)(5)}{(200 \times 10^9)(6.86 \times 10^{-3})} = 2.2 \times 10^{-3}$$

(2.18) قضيب مستقيم ذو مقطع دائري منتظم بقطر (40mm) محمل بقوة محورية مقدارها (400KN) كما موضع بالشكل (2-13-a) ثبت القضيب بصلابة بحيث لا يمكن لنهايتيه الاقتراب من بعضهما، إجهاد الخضوع لمادة القضيب تساوي (σ_y =200MPa)، أوجد الإجهاد في المقطع (1) والمقطع (2).



شكل (2-13)

الحل:

نرمز إلى الجزء العلوي بالرقم (1) والجزء السفلي بالرقم (2) نحسب مساحة مقطع القضيب:

$$A = \pi D^2/4 = [\pi \times (40 \times 10^{-3})^2]/4 = 1.26 \times 10^{-3} m^2$$

$$\sigma = F/A \Rightarrow F = \sigma \times A$$

بما أن القضيب متزن فإن محصلة القوى على المحور (y) تكون مساوية للصفر:

$$+\uparrow \sum F_y = 0, \quad R_1 - 400 + R_2 = 0$$

$$\sigma_1 A - 400 + \sigma_2 A = 0$$

$$\sigma_1 A + \sigma_2 A = 400$$

$$A(\sigma_1 + \sigma_2) = 400$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 400/A = 400/1.26 \times 10^{-3} = 317.5MPa \ ....(1)$$

وبما أن الاستطالة على الجزء (1) تكون مساوية للتقلص على الجزء (2):

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\frac{R_1 L_1}{AE} = \frac{R_2 L_2}{AE} \rightarrow \frac{(\sigma A) L_1}{AE} = \frac{(\sigma_2 A) L_2}{AE}$$

وبإجراء الاختصارات والتعويض بالمعادلة:

$$\frac{\sigma_1 \times A \times 2}{A \times E} = \frac{\sigma_2 \times A \times 0.2}{A \times E}$$

$$2\sigma_1 = 0.2\sigma_2 \rightarrow \sigma_2 = \frac{2\sigma_1}{0.2}$$

$$\sigma_2 = 10\sigma_1 \ ....(2)$$

وبتعويض المعادلة رقم (2) بالمعادلة رقم (1)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 317.5$$
$$\sigma_1 + 10\sigma_1 = 317.5$$
$$11\sigma_1 = 317.5$$
$$\sigma_1 = 28.86MPa \quad \text{..........} (3)$$

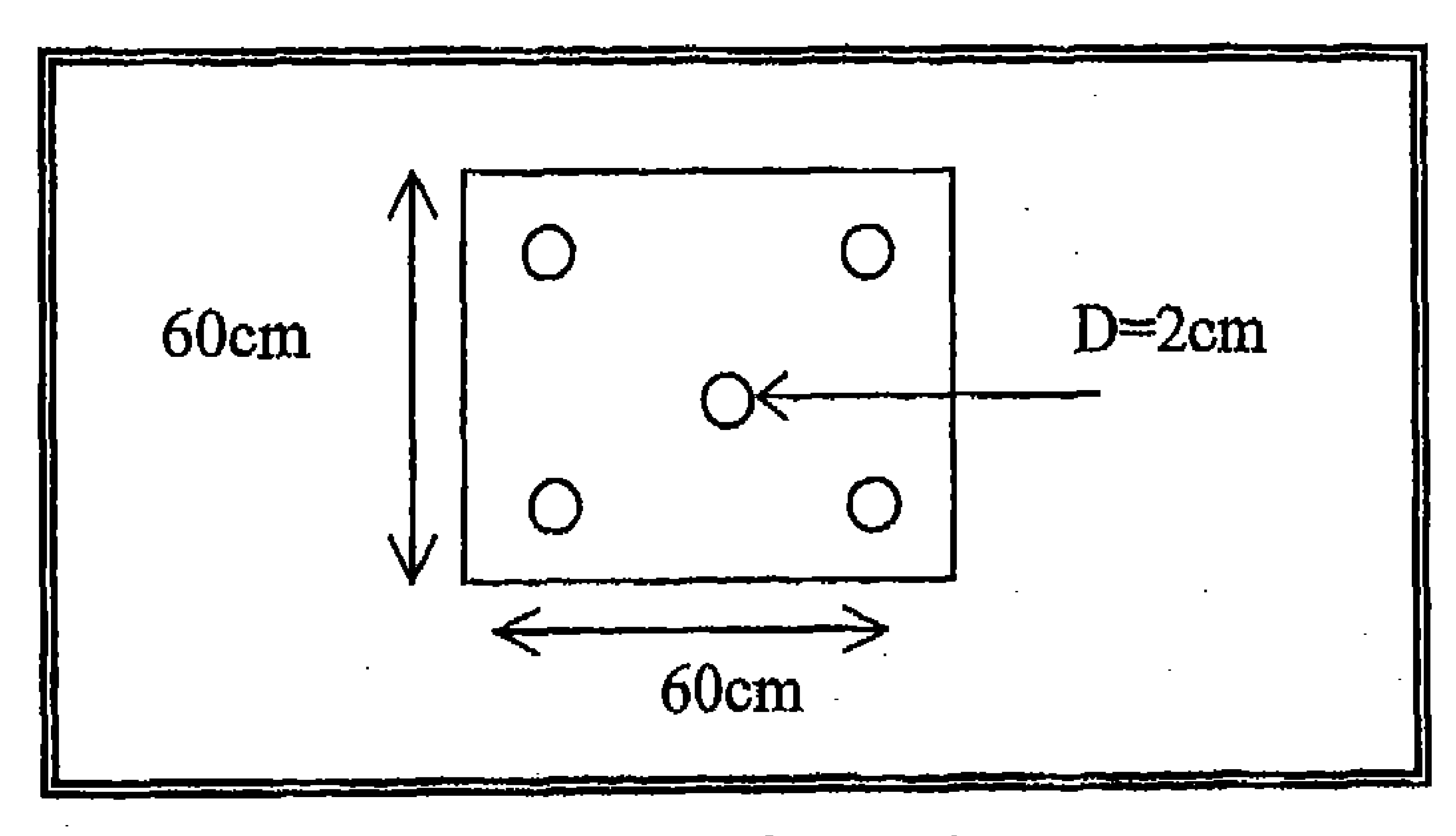
وبتعويض المعادلة (3) في المعادلة (2)

$$\sigma_2 + 10\sigma_1 = 10 \times 28.86 = 288.64\,MPa$$

ولكن إجهاد نقطة الخضوع يساوي (200MPa) لذا يجب تعديل النتيجة لتصبح الإجهادات على المقطع (2) مساوية (200MPa) وتكون الإجهادات على المقطع (1) مساوية لـ:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 317.5$$
$$\sigma_1 + 200 = 317.5$$
$$\sigma_1 = 317.5 - 200 = 117.5\,MPa$$

(2.19) عمود من الخرسانة مقطعه العرضي مربع طول ضلعه (60cm) مسلح بخمسة قضبان حديدية قطر كل منها (2cm) مغروسة في الخرسانة شكل (2-14) إذا علمت أن معامل المرونة للحديد (E_{st}= 200GPa) وللخرسانة (E=14GPa). أوجد إجهادات الشد والضغط في الحديد والخرسانة عندما يكون الحمل المؤثر قدره (P=2MN).



الشكل (2-14)

الحل:

نقوم أولا بحساب مساحة مقطع عمود واحد من الحديد

$$A_{st} = \pi D^2/4 = \frac{\pi\,(2\times10^{-2})^2}{4} = 3.14\times10^{-4}\,m^2$$

ومساحة القضبان الخمسة تكون:

$$A_{s(net)} = 5\times A = (3.14\times10^{-4}) = 1.57\times10^{-3}\,m^2$$

أما مساحة الخرسانة المربعة تكون:

$$A_c = (60\times10^{-2})\times(60\times10^{-2}) = 0.36\,m^2$$

وتكون صافي مساحة الخرسانة بدون القضبان الخمسة

$$A_{c(net)} = A_c - A_{s(net)} = 0.36 - (1.57\times10^{-3}) = 0.358\,m^2$$

تقوم بإيجاد الإجهادات على كل من الخرسانة والحديد من المعادلتين (2-19-a) أو (2-19-b) كما يلي:

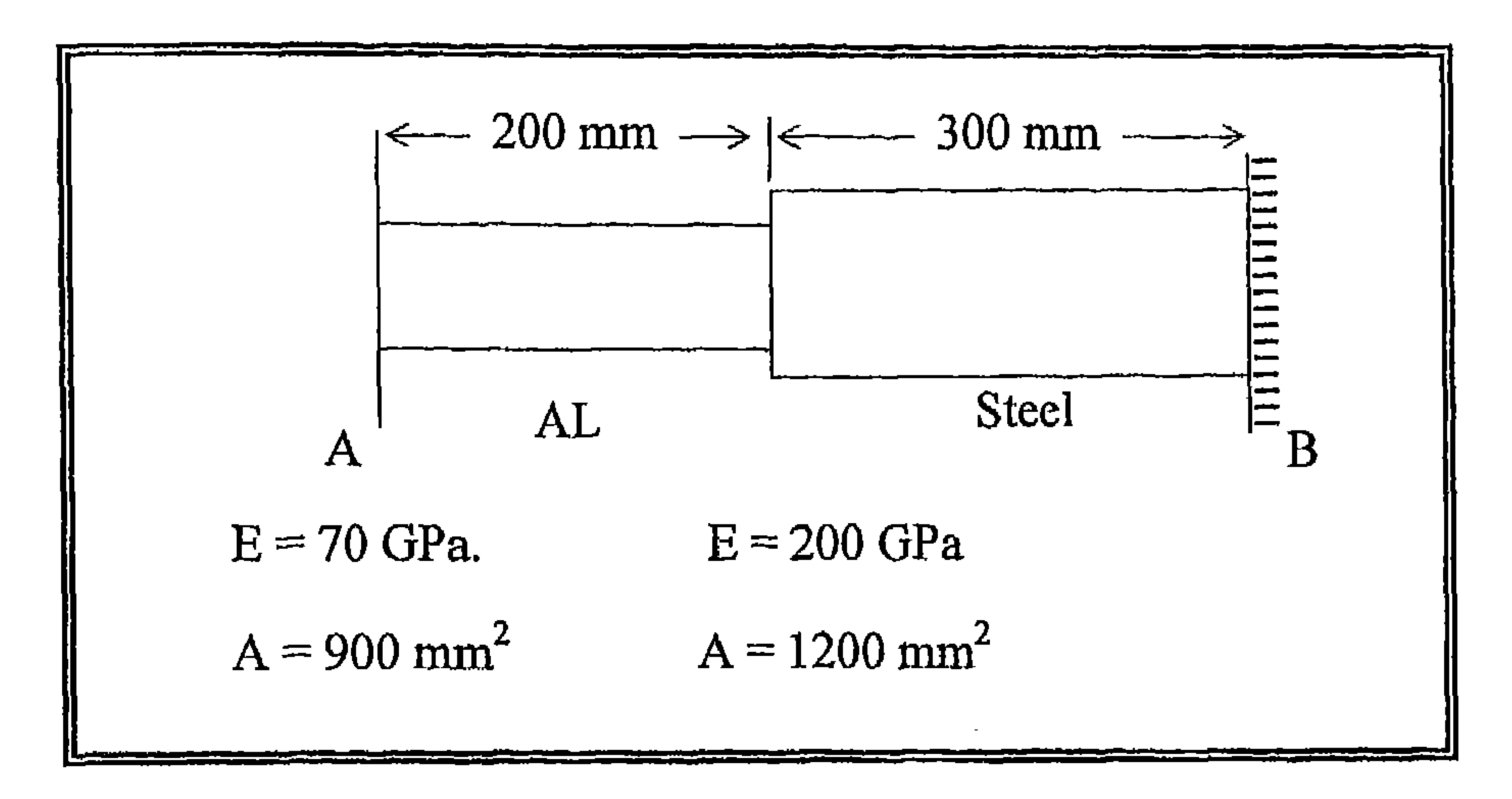
$$\sigma_s = \frac{P}{\left[\left(\frac{E_c A_c}{E_s}\right) + A_s\right]} = \frac{2\times10^6}{\left[\left(\frac{14\times10^9}{200\times10^9}\times0.358\right) + 1.57\times10^{-3}\right]}$$

$$= 75MPa$$

$$\sigma_c = \frac{P}{\left[\left(\frac{E_c A_s}{E_s}\right) + A_c\right]} = \frac{2\times10^6}{\left[\left(\frac{200\times10^9}{14\times10^9}\times1.57\times10^{-3}\right) + 0.358\right]}$$

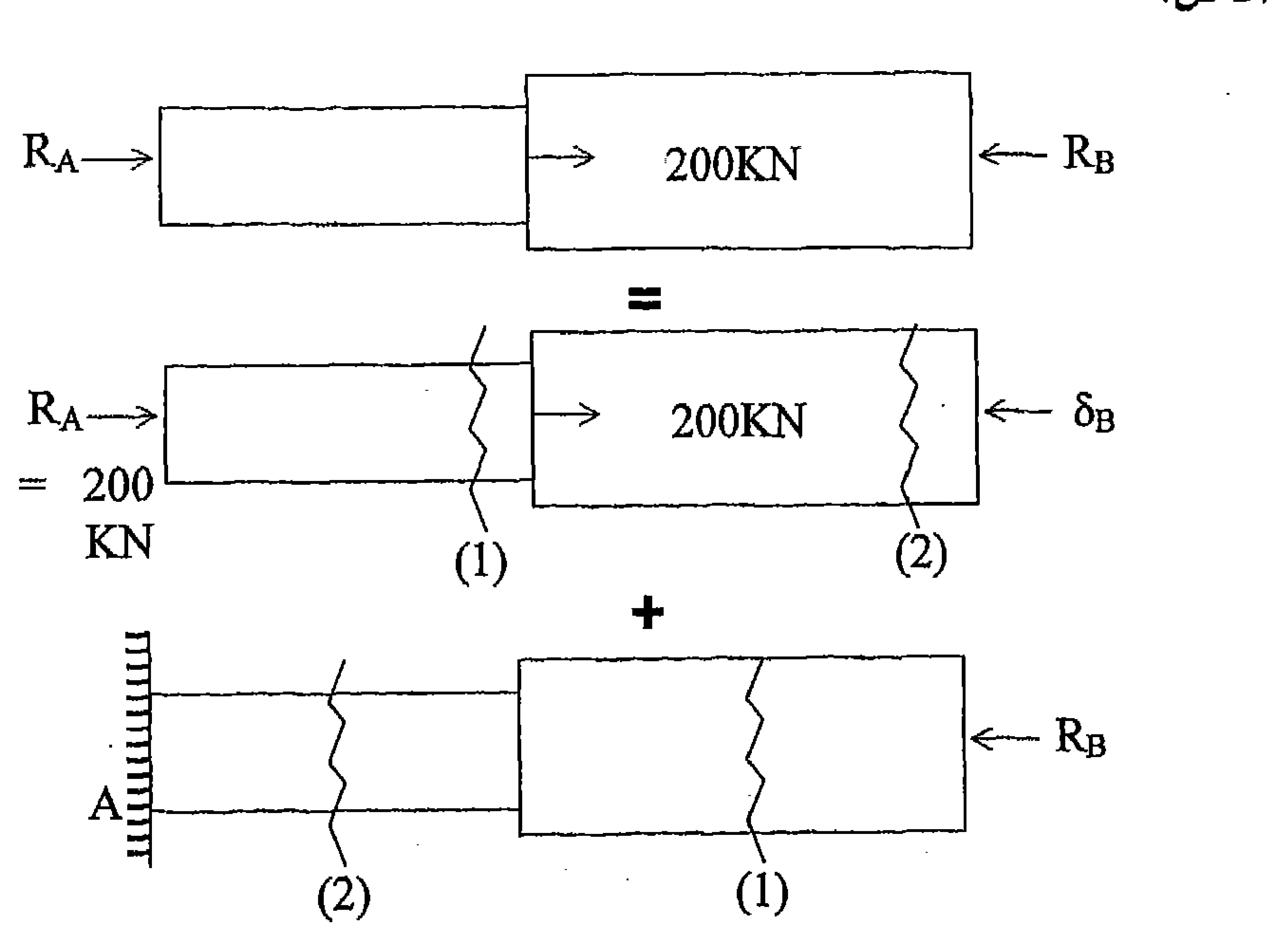
$$= 5.3\ MPa$$

(2.20): الضلع المبين في الشكل مثبت بإحكام بمسندين جسيئين، جد الإجهاد في كل مادة، الناتج من تسليط حمل محوري قدره 200KN .

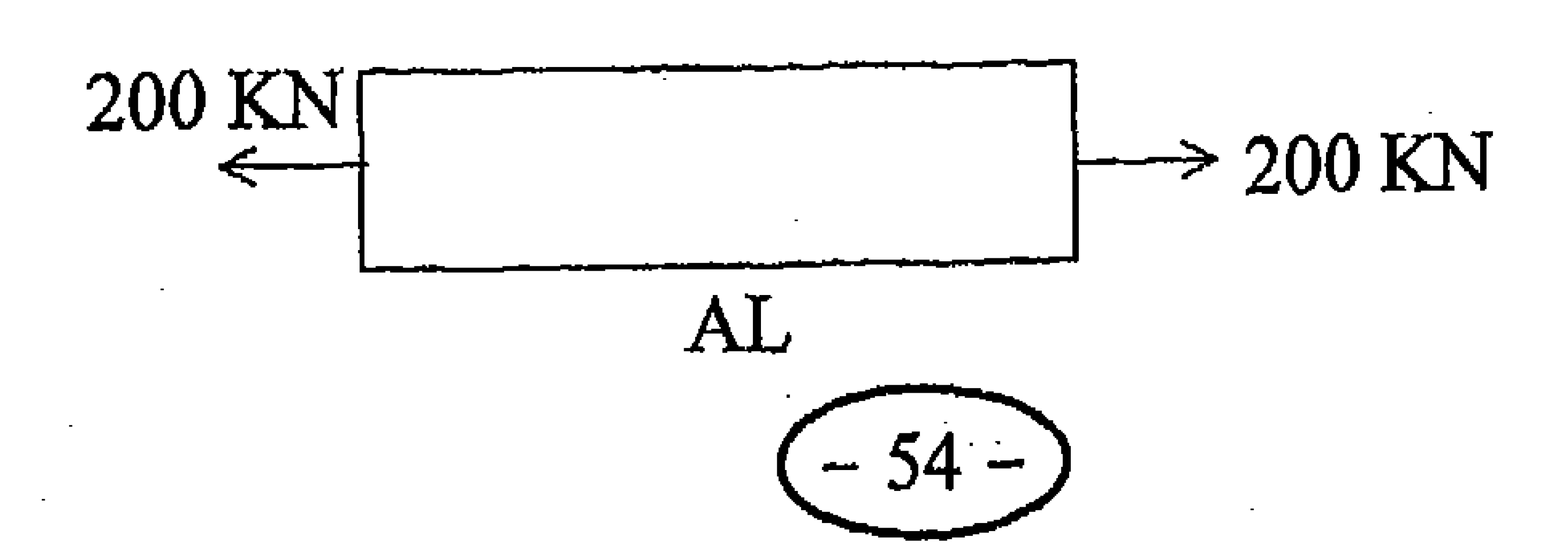


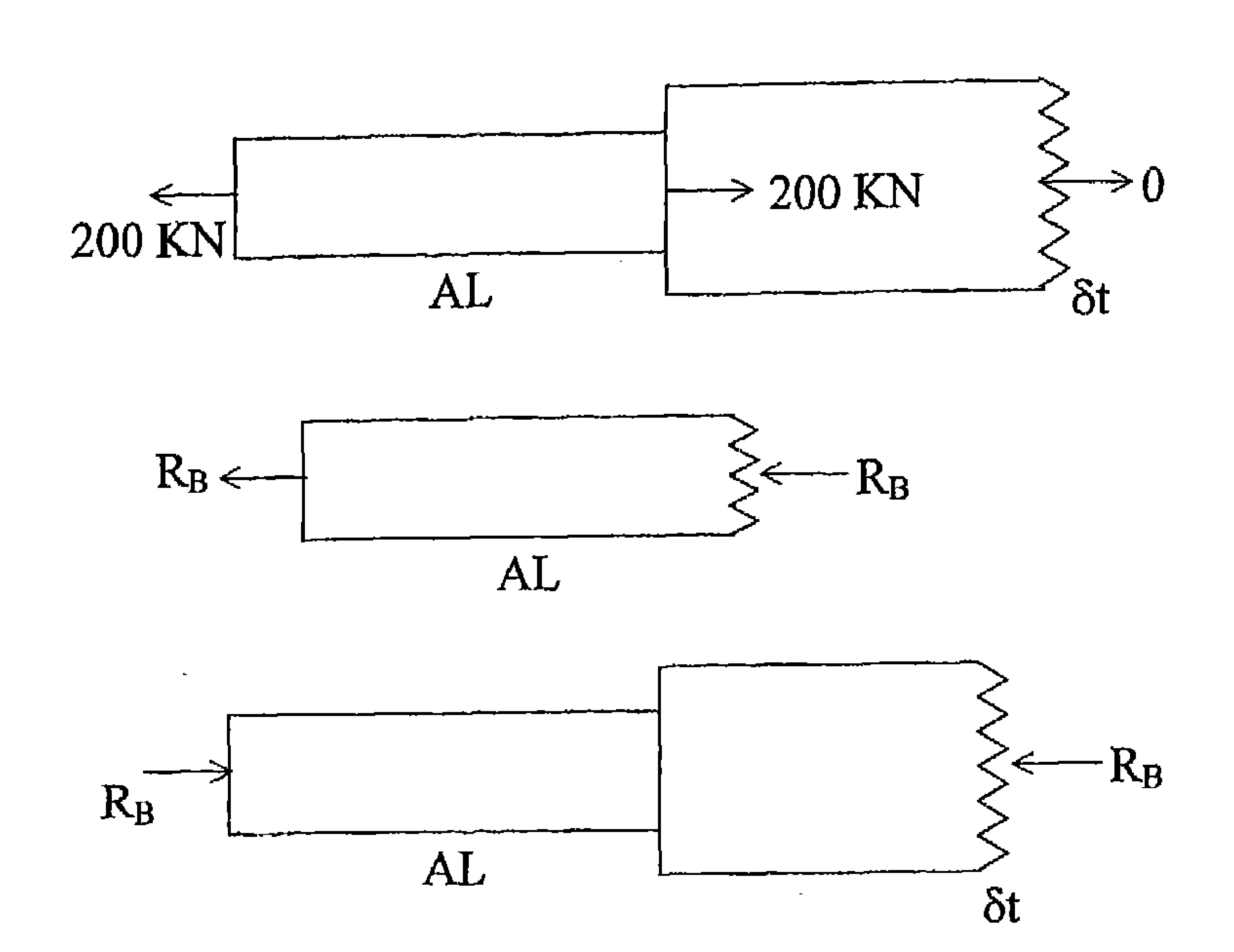
شكل (2-15)

الحل:



$$\delta_A = \frac{200 \times 10^3 \times 0.2}{900 \times 10^{-6} \times 70 \times 10^9} + 0 = 6.34 \times 10^{-4}\,\text{m}$$





$$\delta_B = \frac{-R_B \times 0.3}{1200 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^{9}}$$

$$\frac{-R_B 0.3}{900 \times 10^{-6} \times 70 \times 10^{9}}$$

$$= -4.42 \times 10^{-9} R_B$$

$$6.34 \times 10^{-4} - 4.42 \times 10^{-9} R_B = 0$$

$$R_B = 143.4 \text{ KN}$$

(2-9) التشكل الناتج عن الوزن:

وهو التشكل الناتج في القضبان المستعرضة المثبتة والمعلقة رأسيا بسبب وزنها فقط، وتكون مساوية للتشكل الناتج عن حمل يساوي نصف الوزن المؤثر عند النهاية وتعطي الاستطالة الناتجة عن الوزن بالعلاقة التالية:

$$\delta = \frac{WL}{2AE} \quad \text{......} (2\text{-}20)$$

حيث أن:

δ: الاستطالة الناتجة عن الوزن (m).

W: وزن القضيب (N).

L: طول القضيب (m).

A: مساحة مقطع القضيب (m^2).

E: معامل المرونة لمادة القضيب(Pa).

أمثلة محلولة:

(2.21) سلك من الصلب قطره (5mm) ويستعمل لرفع الأغراض أثناء تشييد المباني، بافتراض أن طول السلك هو (160m) ومعلق رأسيا ومحمل بحمل مقداره (1.5KN) يتم رفعه من الطرف الأسفل للسلك، أوجد الاستطالة الكلية للسلك إذا علمت أن الكثافة الوزنية للصلب ($\gamma=7.7 \times 10^4 \ N/m^3$) وإن معامل المرونة له (E=200GPa).

الحل:

نقوم بحساب مساحة مقطع السلك ثم نقوم بحساب حجم السلك:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{= \pi \times (5 \times 10^{-3})^2}{4} = 1.96 \times 10^{-5} m^3$$

$$V = A \times L = 1.96 \times 10^{-5} \times 160 = 3.142 \times 10^{-3} m^2$$

ثم نحسب وزن السلك:

$$W = V \times \gamma = 3.142 \times 10^{-3} \times 7.7 \times 10^4 = 241.9N$$

نقوم الآن بحساب الاستطالة الناتجة عن الوزن

$$\delta = \frac{WL}{2AE} = \frac{241.9 \times 160}{2 \times 1.96 \times 10^{-5} \times 200 \times 10^9} = 4.93 \times 10^{-3} m$$

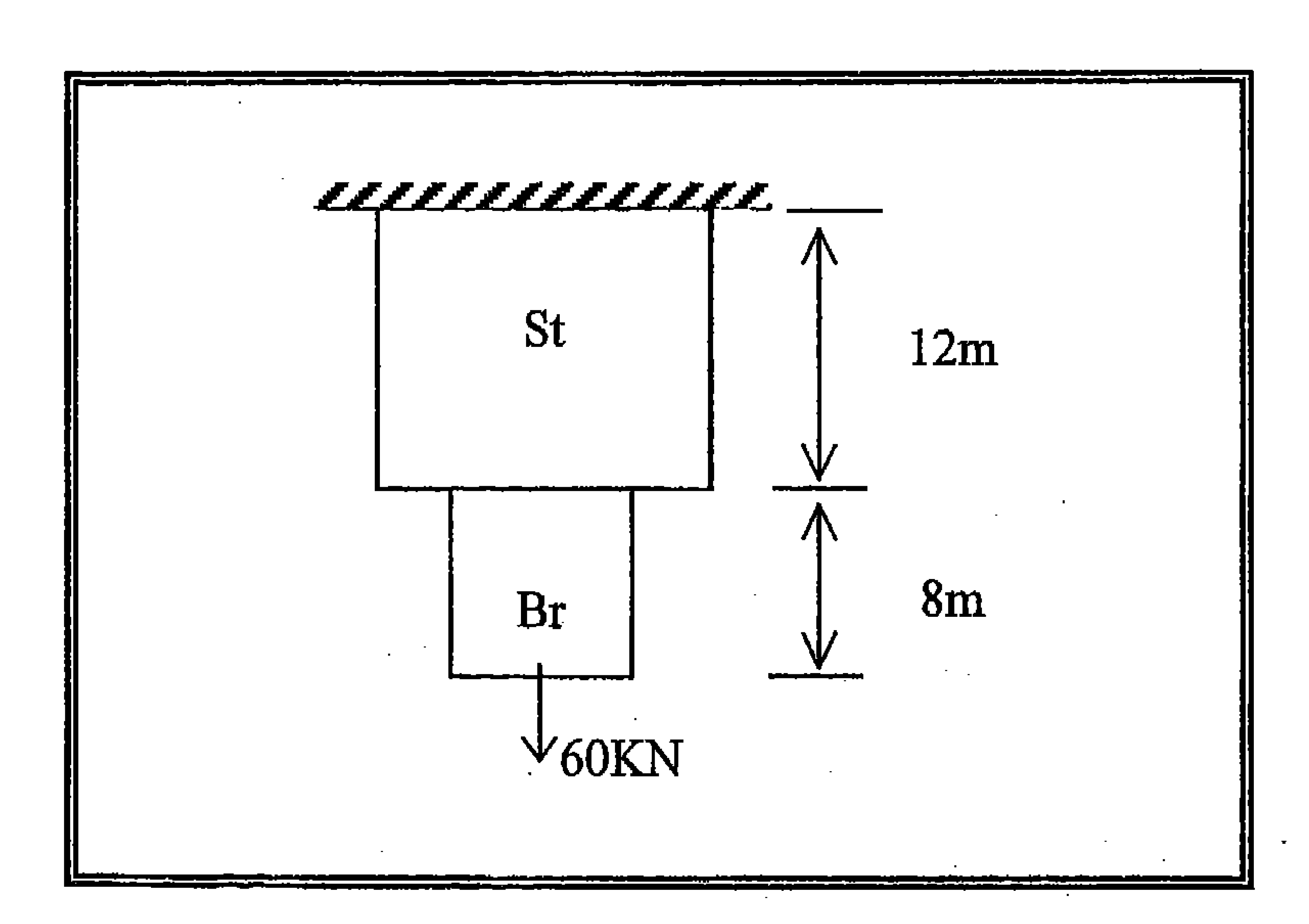
ثم نحسب الاستطالة الناتجة عن الحمل

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} = \frac{(1.5\times10^3)\times160}{(200\times10^9)\times(1.96\times10^5)} = 61.2\times10^{-3}\,m$$

نحسب الآن الاستطالة الكلية للسلك

$$\Delta L_T = \Delta L + \delta = 61.2\times10^{-3} + 4.93\times10^{-3} = 66.2\times10^{-3}\,m$$

(2.22) قضيبان مثبتان ببعضهما بجساءة، ويحملان حملا رأسيا مقداره (60KN) كما هو موضح في الشكل (2-16) القضيب العلوي من الصلب ذو كثافة وزنية ($7.7\times10^4\ N/m^3$) وطوله (12m) ومساحة مقطعه ($700mm^2$) القضيب السفلي من النحاس الأصفر وكثافته الوزنية ($8.25\times10^4\ N/m^3$) وطوله (8m) ومساحة مقطعه ($600mm^2$) ومعامل المرونة للصلب (E_{st}=200GPa) وللنحاس الأصفر (E_{Br}=90GPa)، أوجد الاستطالة الكلية الحادثة لكل من القضيبين.



شكل (2-16)

الحل:

نحسب أولا وزن قضيب الصلب:

$$W_{st} = V_x \gamma = 700 \times 10^{-6} \times 12 \times 7.7 \times 10^4 = 646.8N$$

نحسب الآن الاستطالة الحادثة بسبب وزنه:

$$\delta_{st} = \frac{WL}{2EA} = \frac{(646.8 \times 12)}{(2 \times 200 \times 10^9) \times (700 \times 10^{-6})} = 2.772 \times 10^{-5} m$$

وتكون الاستطالة الناتجة عن الحمل:

$$\Delta L_{st} = FL/EA = [(60 \times 10^3) \times (12)] / [(200 \times 10^9) \times (700 \times 10^{-6})]$$

$$= 5.143 \times 10^{-3} m$$

ثم نحسب الاستطالة الكلية للصلب الناتجة من وزنه والحمل:

$$\Delta L_{T(st)} = \Delta L_{st} + \delta_{st} = (5.143 \times 10^{-3}) + (2.772 \times 10^{-5})$$

$$= 5.171 \times 10^{-3} m$$

ثم نحسب الآن وزن قضيب النحاس:

$$W_{Br} = V \times \gamma = A \times L \times \gamma = (600 \times 10^{-6}) \times (8) \times (8.25 \times 10^4)$$

$$= 396N$$

ثم نحسب الاستطالة الحادثة من وزنه:

$$\delta_{Br} = \frac{WL}{2EA} = \frac{396 \times 8}{2 \times (90 \times 10^9) \times (600 \times 10^{-6})} = 2.933 \times 10^{-5} m$$

نقوم الآن بحساب الاستطالة الناتجة عن الحمل الخارجي ويكون الحمل المؤثر على قضيب النحاس هو الحمل الخارجي (60KN) ووزن قضيب الصلب (646.8N) فيكون الحمل الكلي المؤثر عليه:

$$F_{T(Br)} = F + W_{st} = (60 \times 10^3) + (646.8) = 60646.8N$$

وبالتالي تكون الاستطالة الحادثة له من الحمل الخارجي:

$$\Delta L_{Br} = (FL)/(EA) = [(60646.8) \times (8)] / [(90 \times 10^9) \times (600 \times 10^{-6})]$$

$$= 8.985 \times 10^{-3} m$$

وتكون الاستطالة الكلية للنحاس

$$\Delta L_{T(BR)} = \Delta L_{Br} + \delta_{Br} = (8.985 \times 10^{-3}) + (2.933 \times 10^{-5})$$

$$= 9.014 \times 10^{-3} m$$

وتكون الاستطالة الكلية الحادثة للقضيبين:

$$\Delta L_T = \Delta L_{T(Br)} + \Delta L_{T(st)} = (9.014 \times 10^{-3}) + (5.171 \times 10^{-3})$$

$$= 14.2 \times 10^{-3} m$$

(2-10) الأواني رقيقة الجدران تحت تأثير الضغط الداخلي:

هناك تطبيق آخر لإجهادات عمودية منتظمة تحدث في الأواني رقيقة الجدران المعرضة لضغط سوائل أو غازات، مثل خزانات حفظ السوائل والأوعية، ومواسير المياه والغلايات وبعض أجزاء السيارات.

وستقتصر الدراسة هنا على الاسطوانات الرقيقة أو حلقات دورانية أو قشرة كروية تكون متماثلة حول المحور لهذه الأسطح القشرية.

الإجهادات التي تقع على أسطح هذه الأواني تقسم إلى ثلاث أنواع:

1- الإجهاد المحيطي المماسي (Hoop Stress) ويرمز له (σ_H).

2- الإجهاد المحوري (Axial Stress).

3- الإجهاد الطولي (Longitudinal Stress) ويرمز له (σ_L).

وبفرض أن نسبة سمك الحائط إلى قطر الإنحناء الداخلي أقل من $\left(\frac{1}{20}\right)$ وبالتالي فإن الإجهاد الحلقي والإجهاد الطولي هو ثابت على امتداد سمك الجدران وإن قيمة الإجهاد المحوري يكون مساويا للصفر تقريبا مقارنة مع الإجهاد الحلقي والإجهاد الطولي وبالتالي يمكن إهماله.

(2-10-a) الاجهادات في الاسطوانات رقيقة الجدران:

سندرس أولا الإجهاد الحلقي والإجهاد الطولي على اسطوانة رقيقة الجدران مغلقة عند نهايتيها بلوحي غطاء، معرضة لضغط داخلي مقداره (P) موزع بانتظام. القطر الداخلي للحائط (D) وسمكه (t) وبإهمال القيود عند نهايتي اللوحين شكل (2-17-a) نفترض إزالة جزء من الاسطوانة بطول (L) حسب مبدأ تساوي نصف اسطوانة، فتكون القوة الكلية على نصف الاسطوانة نتيجة للضغط الداخلي (P):

$$P_T = P \times A = PDL$$

ولكن مساحة سماكة الجدران تكون مساوية ل(2tL) وبالتالي فإن الإجهاد الحلقي يحسب على الشكل التالي:

$$\sigma_H = \frac{F}{A} = \frac{P_T}{A} = \frac{PDL}{2tL} = \frac{PD}{2t}$$

$$\sigma_H = \frac{PD}{2t} = \frac{PR}{t} \quad \text{.......... (2-21)}$$

حيث أن:

P: الضغط الداخلي (N/m^2).

D: القطر الداخلي للاسطوانة (m).

R: نصف القطر الداخلي للاسطوانة (m).

t: سمك حائط الاسطوانة (m).

نأخذ قطاعا يمر من خلال الاسطوانة عموديا على المحور الهندسي شكل (2-12-c) لتحديد الإجهاد الطولي، تكون القوة الكلية المسلطة على نهاية الاسطوانة P_T:

$$P_T = PA = P\frac{\pi D^2}{4}$$

وهذه القوة هي نفسها القوة المسلطة على مساحة المعدن المقاوم لهذه القوة، ولكن مساحة المعدن المقاوم لهذه القوة = المحيط (πD) × سماكته (t).

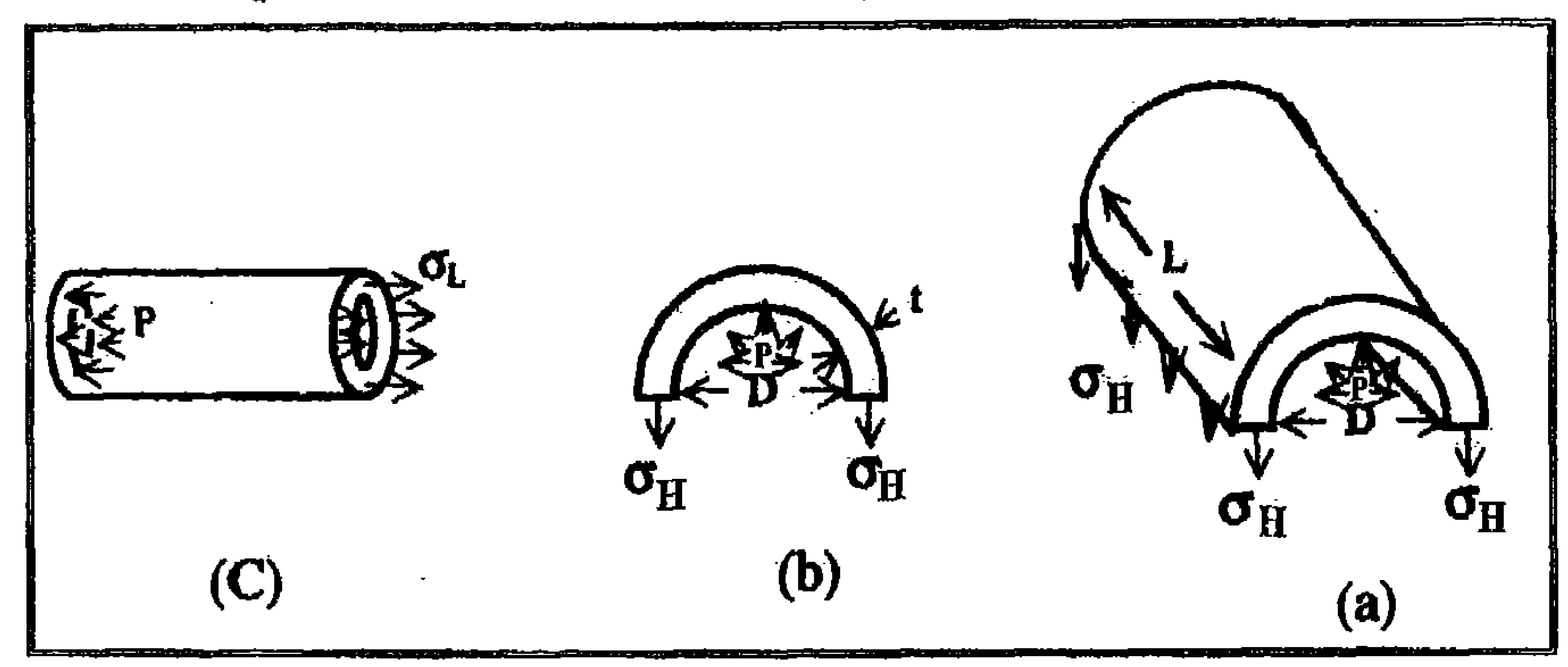
$$A = \pi D t$$

لذا فإن الإجهاد الطولي يمكن إيجاده على الشكل التالي:

$$\sigma_L = \frac{P_T}{A} = \frac{\left(P\pi D^2\right)/4}{\pi D t} = \frac{PD}{4t}$$

$$\sigma_L = \frac{PD}{4t} = \frac{PR}{2t} \quad \text{..........} (2\text{-}22)$$

نلاحظ أن الإجهاد المماسي يكون ضعف الإجهاد الطولي:



شكل (2-17)

(2-10-b) الاجهادات في قشرة كروية رقيقة تحت ضغط داخلي:

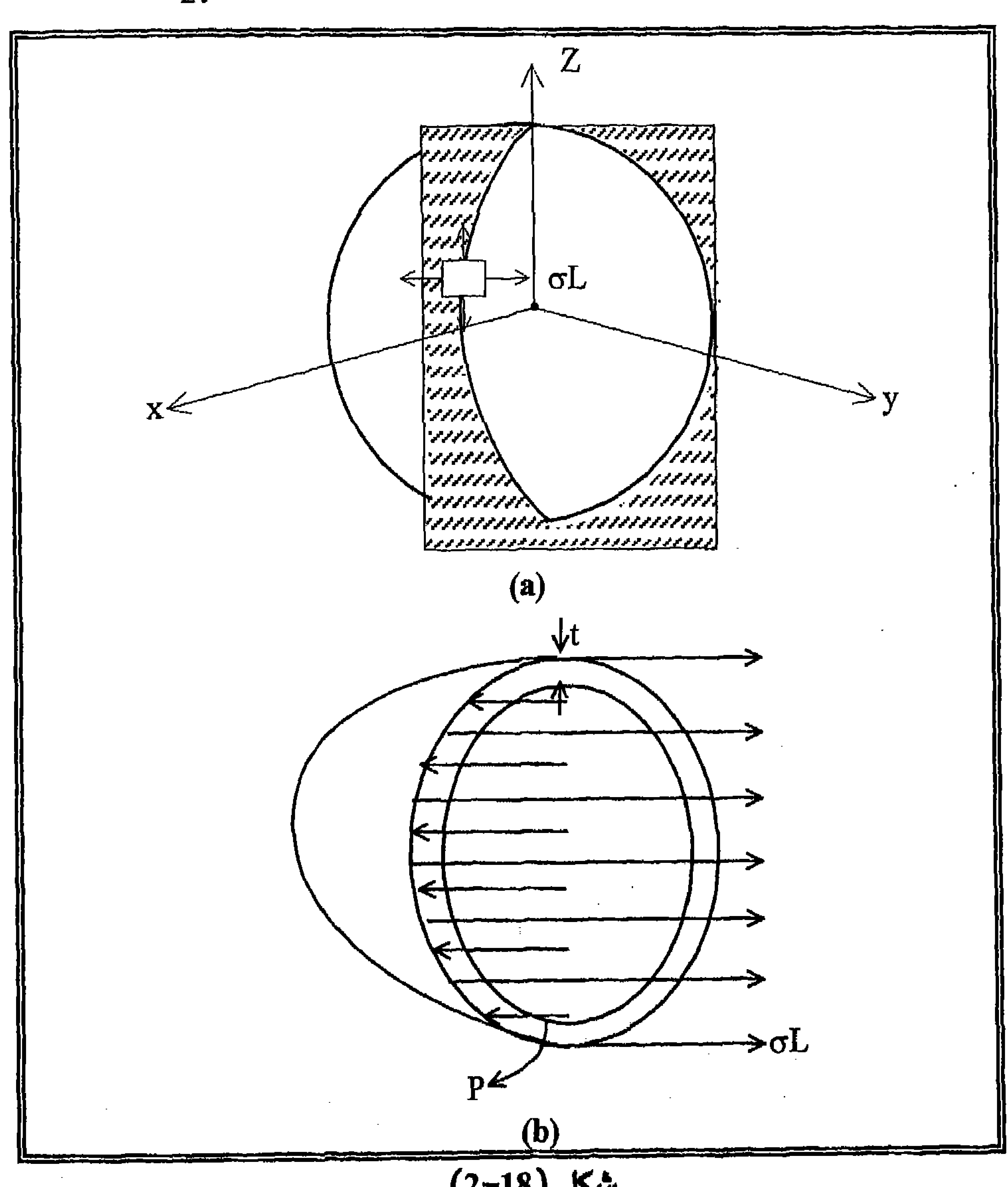
ليكن لدينا وعاء كروي سماكته t وقطره الداخلي R ويتعرض لضغط داخلي P/ ثم أخذ مقطع عرضي منه ورسم مخطط الجسم الحر كما في شكل (2-18-a) و (2-18-b):

من الملاحظ أنّ الإجهاد الوحيد المؤثر على جدار الوعاء الكروي هو الإجهاد الطولي محاولاً أن يجهد الوعاء طولياً دون اعتبار للاتجاهات المختلفة لهذا الإجهاد.

وعند أخذ معادلة الاتزان في اتجاه y:

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow \sigma_L\ (2\pi Rt) - P\left(\pi R^2\right) = 0$$

$$\sigma_L = \frac{PR}{2t}$$



شكل (2-18)

أمثلة محلولة:

(2.22) يتكون خزان ضاغط الهواء من اسطوانة مغلقة بنهايتين نصف كرويتين قطر الاسطوانة الداخلي مقداره (500mm) ومعرضة لضغط داخلي مقداره 4MPa. والخزان مصنوع من الصلب له إجهاد خضوع مساوي (250MPa) ومعامل الأمان المستعمل (3) احسب السمك المطلوب لحائط الاسطوانة، أهمل التأثيرات عند الوصلة بين الاسطوانة ونصف الكرة.

الحل:

بما أن الإجهاد المحيطي يساوي ضعف الإجهاد الطولي لذا فإن الإجهاد الحرج يحسب على أساس الإجهاد المحيطي، باستخدام معامل الأمان يكون الإجهاد المحيطي المسموح به يساوي.

$$\sigma_H = \sigma_u \ / \ F.S. = 250/3 = 83.33MPa$$

يحسب سمك الاسطوانة من معادلة الإجهاد المحيطي

$$\sigma_H = PD/2t \longrightarrow t = PD/2\sigma_H$$

$$t = \frac{4 \times 500}{2 \times 83.33} = 12mm$$

(2.23) ماسورة قائمة رأسية أشبه ما تكون بخزان اسطواني مفتوح من الأعلى وله محور رأسي قطره الداخلي (2m) وارتفاعه (20m)، تم ملئ الخزان بمياه كثافتها الوزنية ($1\times 10^4 N/m^3$) والخزان مصنوع من الحديد الصلب، إجهاد الخضوع له (250MPa) ويستعمل معامل أمان قدره (2.5)، ما هو سمك لوح الصلب الضروري عند قاع الخزان بافتراض أن طبقة اللحام الطولي في مثل قوة المعدن المصمت؟

الحل:

نحسب أولا مقدار الضغط المسلط داخل الخزان:

$$P = \rho gh = \gamma h = 1\times10^{4}\times20 = 20\times10^{4} = 0.2MP$$

وهذا الضغط يساوي وزن عمود الماء المسلط على قاعدة الخزان، وحيث أن ضغط هيدورستاتيكي فهو يؤثر في جميع الاتجاهات بنفس القيمة، ولكنه يتناقص كلما اتجهنا لقمة الخزان وتكون أكبر قيمة له عند قاعدة الخزان من الأسفل وهي منطقة الدراسة، ولا يوجد إجهاد طولي لأن قمة الخزان مفتوحة لذا نقوم بحساب الإجهاد الحلقي باستخدام معامل الأمان.

$$\sigma_H = \sigma_u / F.S = 250 = 100Pa$$

نقوم الآن بحساب سمك اللوح من معادلة الإجهاد الحلقي

$$\sigma_H = PD/2t$$

$$t = \frac{PD}{2\sigma_H} = \frac{0.2\times2}{2\times100} = 2\times10^{-3}m = 2mm$$

(2.24) خزان كروي قطره (25mm) يستعمل لتخزين غاز، سمك قشرة ألواح سطحه (15mm) وإجهاد التشغيل للمادة يساوي (150MPa)، ما هي أقصى قيمة مسموح بها لضغط الغاز (P)؟

الحل:

لأن الخزان كروي فإن إجهاد الشد يكون موزعا بانتظام في جميع الاتجاهات كما ذكرنا وتطبق عليه العلاقة التالية:

$$\sigma_L = PD/4t$$

$$p = \frac{\sigma_L\times4\times t}{D} = \frac{150\times10^{6}\times4\times15\times10^{-3}}{25} = 0.36MPa$$

(2.25) خزان ماء قطره 8m وارتفاعه 12m مملوء بالماء، أحسب أقل سمك لألواح الخزان إذا كان الإجهاد محدداً بـ 40MPa.

$$P = \rho gh = 1000\times9.81\times12$$
$$= 117.72KPa$$

$$\sigma_H = \frac{PR}{t}$$

$$t = \frac{PR}{\sigma_H} = \frac{117720 \times 4}{40 \times 10^6}$$

$$= 0.0118 \text{ m}$$

$$= 11.8 \text{ mm}$$

(2.26): خزان غاز كروي له نصف قطر 1.5m إذا تعرض لضغط داخلي قدره (P = 300 KPa)، أوجد أقصى سمك حتى لا يتجاوز الإجهاد فيه 12MPa.

$$\sigma_L = \frac{PR}{2t}$$

$$t = \frac{PR}{2\sigma_L} = \frac{300 \times 10^3 \times 1.5}{2 \times 12 \times 10^6}$$

$$= 0.01875 \text{ m}$$

$$= 18.75 \text{ mm}$$

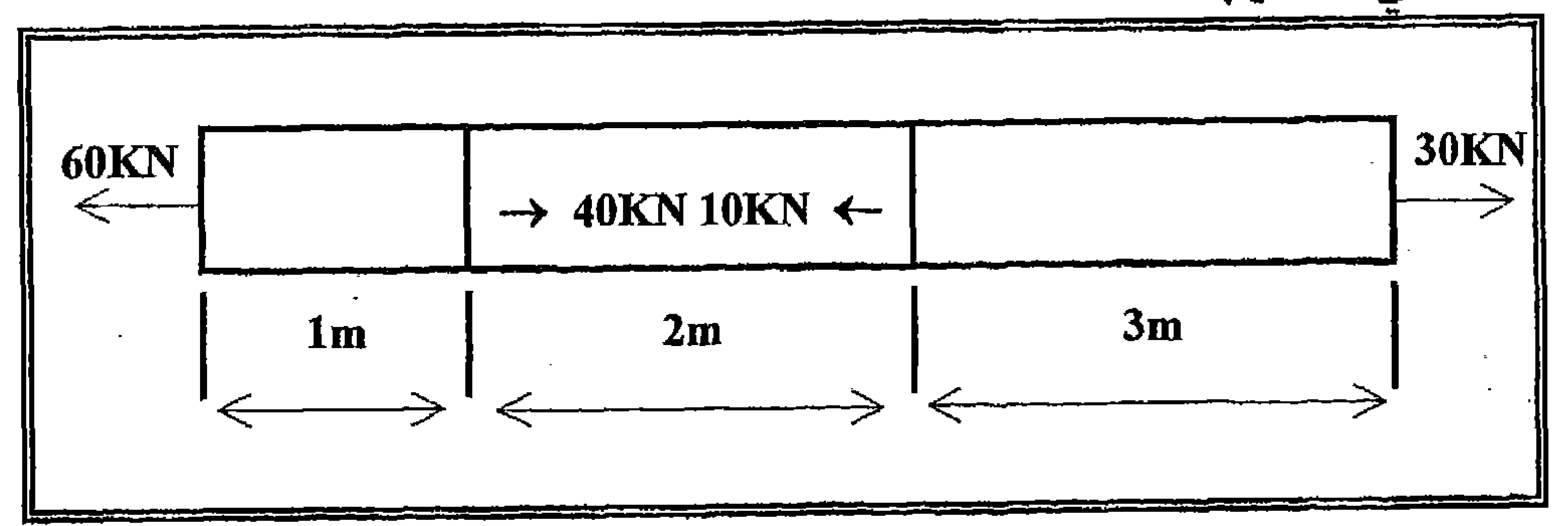
مسائل إضافية:

(2.1) قضيب مستقيم ذو مقطع مستعرض منتظم معرض لشد محوري، مساحة المقطع المستعرض للقضيب ($40mm^2$) وطوله (4m)، حمل بقوة مقدارها (30KN) فأحدثت استطالة كلية للقضيب مقدارها (1mm)، أوجد معامل المرونة لمادة القضيب؟

(2.2) احسب الارتفاع لحائط يمكن بناؤه من الخرسانة بفرض أن مقاومة الضغط القصوى (18MPa) ومعامل أمان (3.5)، إذا علمت أن الكثافة الوزنية للخرسانة ($21KN/m^3$).

(2.3) قضيب دائري مصمت من الصلب قطره (5mm) وطوله (400mm) ومثبت في نهايته قضيب مربع من النحاس الأصفر طول ضلعه (20mm) وطوله (300mm). والمحاور الهندسية للقضيب تقع على خط واحد، وتؤثر قوة شد محورية مقدارها (4KN) عند أقصى نقطة من النهايتين، إذا علمت أن معامل المرونة للصلب (200GPa) وللنحاس الأصفر (90GPa) أوجد الاستطالة الكلية للقضيبين.

(2.4) قضيب من النحاس الأصفر له مقطع مستعرض مساحته ($2\times10^3 mm^2$) ومعرض للأحمال المحورية الموضحة في الشكل (2-14)، إذا علمت أن معامل المرونة للنحاس الأصفر (90GPa)، أوجد الاستطالة الكلية الحادثة في القضيب.



شكل (2-19)

(2.5) قضيب دائري مصمت من النحاس، قطره (20mm) معرض لقوة شد محوري مقدارها (40KN)، إذا علمت أن معامل مرونة للنحاس (90GPa) و (v=0.24) أوجد مقدار النقص في قطر القضيب نتيجة هذا الحمل.

(2.6) قضيب مربع من الصلب طول ضلعه (40mm) وطوله (300mm) تؤثر عليه قوة شد محورية مقدارها (250KN)، إذا علمت أن معامل المرونة للصلب (200GPa) و(v=0.33) أوجد مقدار التغيير في حجم القضيب.

(2.7) قضيب مستقيم من الألمنيوم قطره (35mm) معرض لقوة شد محوري مقدارها (60KN)، إذا علمت أن معامل المرونة للألمنيوم (70GPa) و(ν=0.26) وطول القضيب (300mm) أوجد ما يلي:

1- الإجهاد 2-الإنفعال 3- الاستطالة 4- التغيير في القطر

5- التغيير في مساحة المقطع 6- التغير في الحجم

7- طاقة الانفعال المختزنة.

(2.8) تُحمل اسطوانة الهواء المضغوط لاستعمالات المصانع ضغطاً مقداره (20MPa) عند وقت التسليم، قطرها الخارجي (300mm)، إذا علمت أن إجهاد الخضوع لمادة الصلب المصنوعة منها هذه الاسطوانة هو (250MPa)، ومعامل أمان (3)، احسب سمك جدارها.

(2.9) يستعمل خزان أسطواني رأسي قطره (25m) لتخزين الديزل، وتم ملؤه حتى ارتفاع (14m) بالديزل الذي كثافته (885kg/m3) إذا علمت أن إجهاد الخضوع لألواح القشرة السطحية (250MPa) ومعامل الأمان (3)، بإهمال تأثير الانحناء، أوجد سمك قاعدة هذا الخزان.

(2.10) خزان كروي قطره (30m) مصنوع من الحديد الصلب سمك قشرته (20mm) يستعمل لتخزين غاز مضغوط، إذا علمت أن إجهاد الخضوع لمادة الخزان (250MPa) ومعامل الأمان (3)، احسب أقصى إجهاد داخلي مسموح به بفرض أن طبقات اللحام بين الألواح المختلفة لها نفس قوة المعدن المصمت.

الوحدة الثالثة

الاجهادات الحرارية

الوحدة الثالثة

الاجهادات الحرارية

لنأخذ قضيبين الأول (شكل (3-1-a)) يمثل نظاماً محدداً استاتيكياً، والثاني (شكل (3-1-b)) يمثل نظاماً غير محدد استاتيكياً. عند تسخين القضيب المثبت من نهاية واحدة بمقدار (ΔT) فإن الأبعاد الطولية والعرضية تزداد والزيادة في الطول (δ_T) تساوي حسب العلاقة التالية:

$$\delta_T = \alpha \, \Delta T \, L \quad \text{.........} (3-1)$$

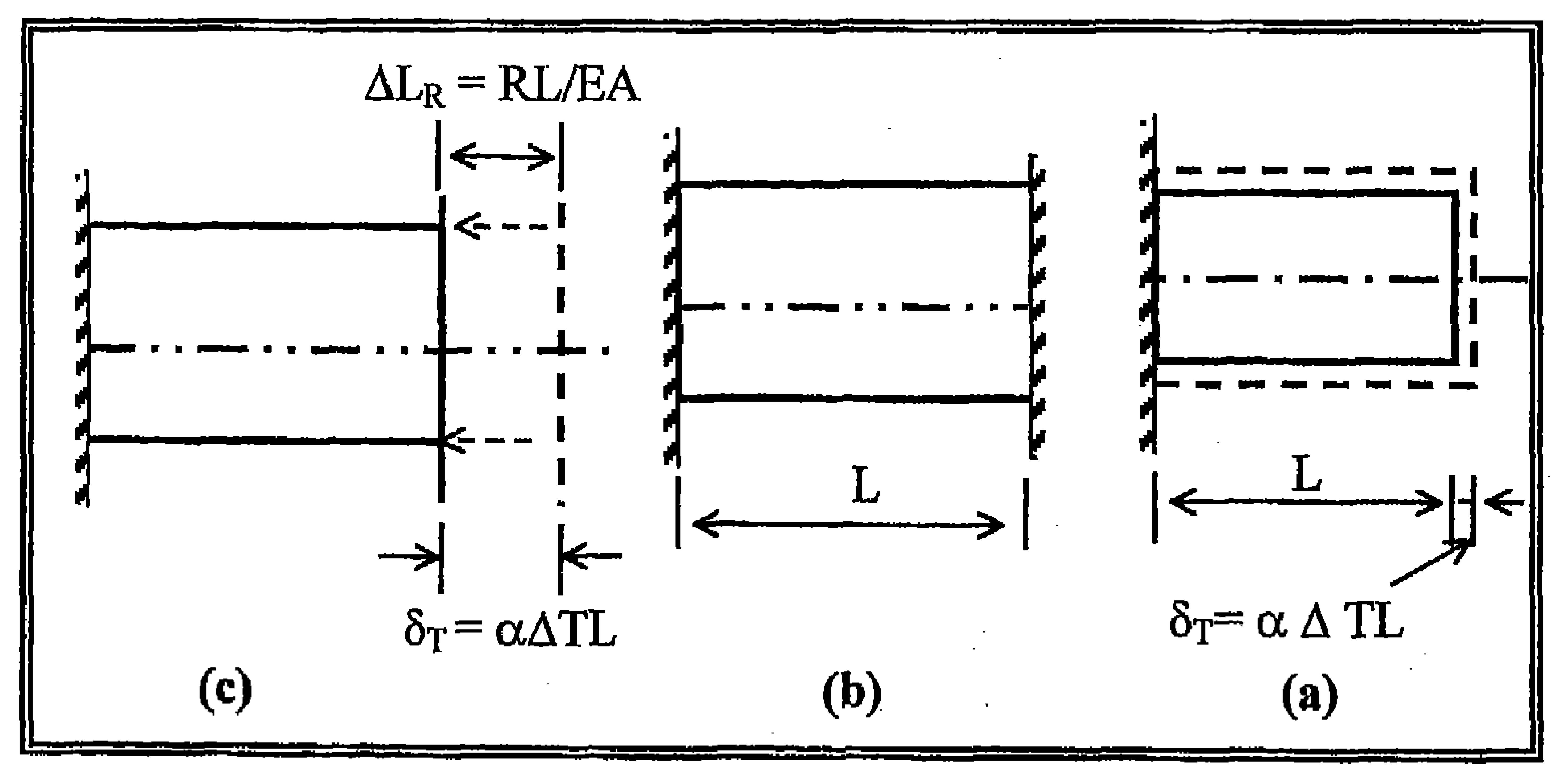
حيث أن:

δT : الزيادة في الطول بتأثير الحرارة (m).

α : معامل التمدد ($1/C^\circ$) أو ($1/k$).

ΔT : التغيّر في درجة الحرارة (C° أو K).

L: طول المادة الابتدائي (m).



شكل (3-1)

في شكل (3-1-a) لا تظهر أي قوى داخلية لأنّ القضيب غير مقيّد وهو حرّ الاستطالة.

وعند تسخين القضيب المثبت من نهايتيه بمقدار (ΔT) كما في الشكل (3-1-C) تظهر فيه قوى داخلية ضاغطة، وذلك لأنّ النهاية المثبتة تعرقل استطالة القضيب.

ومن هنا اتبعت قاعدة عامة في الأنظمة المحددة استاتيكياً تظهر التشوهات عند اختلاف درجات الحرارة بدون وجود قوى داخلية، أمّا في الأنظمة غير المحددة استاتيكياً فإن اختلاف درجات الحرارة يصاحبه ظهور قوى داخلية ولتحديد هذه القوى تستعمل طريقة عادية لحساب الأنظمة غير المحددة استايتكياً، حيث نهمل في مخيلتنا إحدى النهايات المثبتة، ولتكن اليمنى مثلاً، وعند ذلك تتوفر للقضيب إمكانية الاستطالة بمقدار ($\delta_T = \alpha \Delta TL$) ولكن قوة رد الفعل (R) تضغط القضيب بمقدار $\Delta L_R = \frac{RL}{AE}$، إن الإزاحة الحقيقة لمقطع النهاية اليمنى يساوي صفراً:

$$\delta_T = \Delta L_R \rightarrow RL / EA = \alpha \, \Delta TL$$

$$R = (\alpha \, \Delta T \, L \, E \, A) / L = \alpha \, E \, A \, \Delta T$$

ولكن :

$$\sigma_T = R / A$$

$$\sigma_T = (\alpha \, E \, A \, \Delta T) / A$$

$$\sigma_T = \alpha \, E \, \Delta T \quad \text{..........} \quad (3\text{-}2)$$

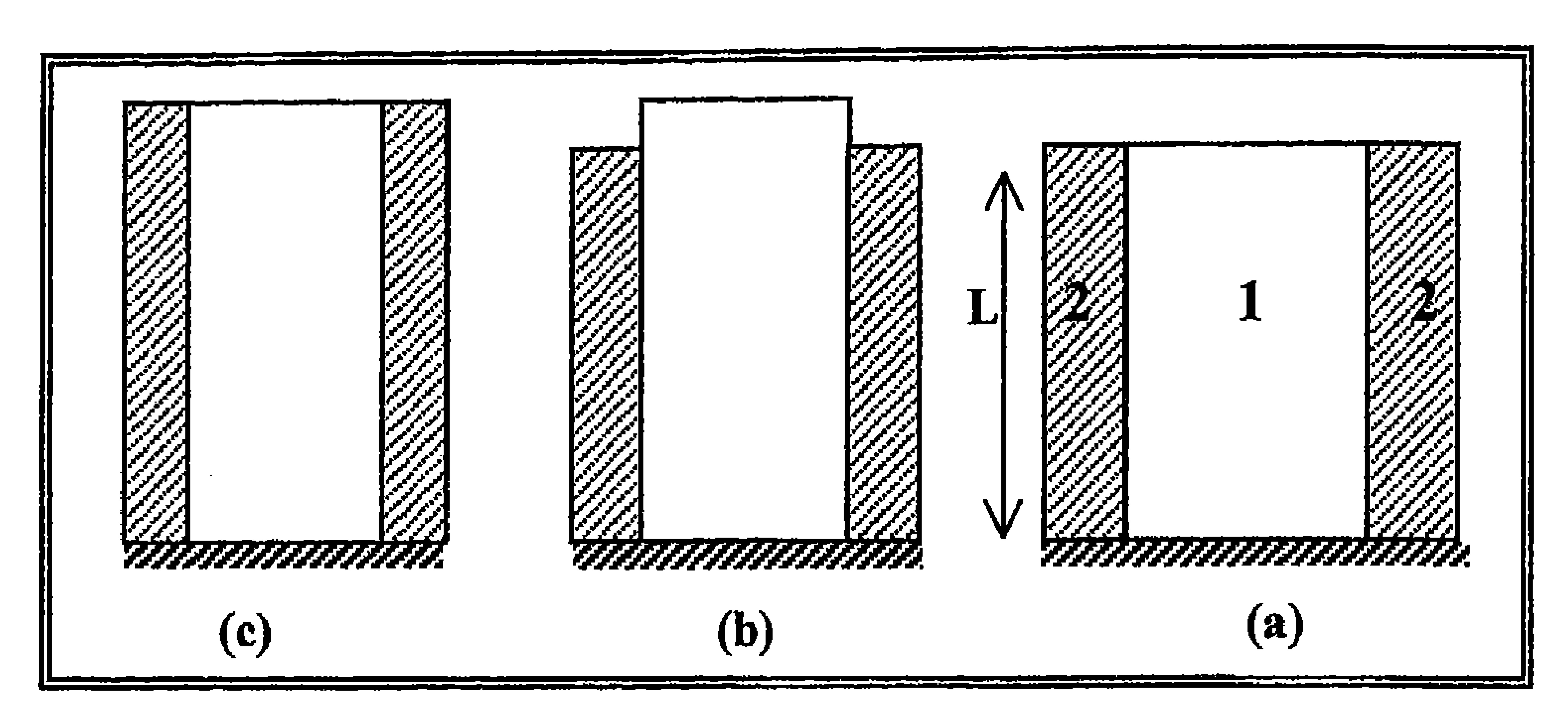
وبما أن:

$$\varepsilon_T = \delta_T / L$$

$$= (\alpha \, \Delta T \, L) / L$$

$$\therefore \varepsilon_T = \alpha \, \Delta T \quad \text{......(3-3)}$$

وهذه الصيغ تصلح للقضبان ذات المقطع الثابت. ويمكن أن تكون مقادير الاجهادات الحرارية σ_T كبيرة جداً، ولتقليل ذلك نستعمل الخلوصات الحرارية أو ما تسمى فواصل التمدد.



شكل (2-3)

أما في حالة الجسم المكون من مادتين مختلفتين (يعد الجزء الثالث من الاجهادات المركبة) ومعرض لتغيير في درجات الحرارة شكل (3-2-a) فإن لكل جسم معامل تمدد مختلف، وبالتالي فإن الاستطالة الحادثة للمادة (1) تختلف عن الاستطالة للمادة (2) شكل (3-2-b) ولكن إذا كانت نهايتي كل منهمات مثبتتان ببعضهما فإن الاستطالة تكون متساوية لكل منهما، أي أن:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \rightarrow \Delta L_1 - \Delta L_2 = (\alpha_1 \, \Delta TL) - (\alpha_2 \, \Delta TL)$$

$$\Delta L_1 - \Delta L_2 = \Delta TL \, . \, (\alpha_1 - \alpha_2) = \Delta L_T$$

أي أن الاستطالة الكلية تكون:

$$\Delta L_T = \Delta TL \, (\alpha_1 - \alpha_2) \quad \text{......(3-4)}$$

أمثلة محلولة:

(3 .1) أوجد الاستطالة والإجهاد والانفعال الناتج عن درجة الحرارة عندما تتعرض لها قطعة طولها (60cm) لتكون درجة الحرارة النهائية (-30C°) والابتدائية (30C°)، وكان معامل التمدد الحراري ($6\times10^{-6}/C°$) ومعامل المرونة (20GPa).

الحل:

نحسب أولاً فرق درجات الحرارة التي تعرضت لها القطعة.

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (-30) - (30) = -60C°.$$

نلاحظ أن القطعة تعرضت إلى التبريد.

نسحب بعد ذلك مقدار الانكماش الحادث.

$$_T = \alpha\ \Delta TL = 6 \times 10^6 \times (-60) \times 60 \times 10^{-2} = 0.216 \times 10^{-3}m.$$

نلاحظ أن الإشارة السالبة لتدل على أن التشكل الحادث هو عبارة عن تقلص للعينة.

نقوم الآن بحساب مقدار الانفعال الحادث:

$$\epsilon_{T\ =\alpha} \Delta T = 6 \times 10^{-6} \times (-60) = -3.6 \times 10^{-4}$$

تظهر أيضاً إشارة السالب لأنه انفعال تقلص (انضغاط).

نحسب الآن مقدار الإجهاد الحراري:

$$\sigma_T = E\ \alpha\ \Delta T = 20 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6} \times (-60) = -7.2\ MPa.$$

وإشارة السالب لتدل أنه إجهاد تقلص (انضغاط).

(3 . 2) يراد تحديد الإجهادات التي تظهر في قضبان السكة الحديدية صيفاً عند درجة حرارة (20C°) إذا كانت هذه القضبان قد وضعت شتاءً وبدون فواصل عند درجة حرارة (-20C°) مع العلم بأن معامل التمدد الطولي للفولاذ ($\alpha = 125 \times 10^{-7}\ 1/C°$) ومعامل المرونة (200 GPa).

الحل:

$\Delta T = T_2 - T_1 = 20 - (-20) - 40C°.$

$\sigma_T = E\,\alpha\,\Delta T = (200 \times 10^9)\,(125 \times 10^{-7})\,(40)$

$= 0.1$ GPa

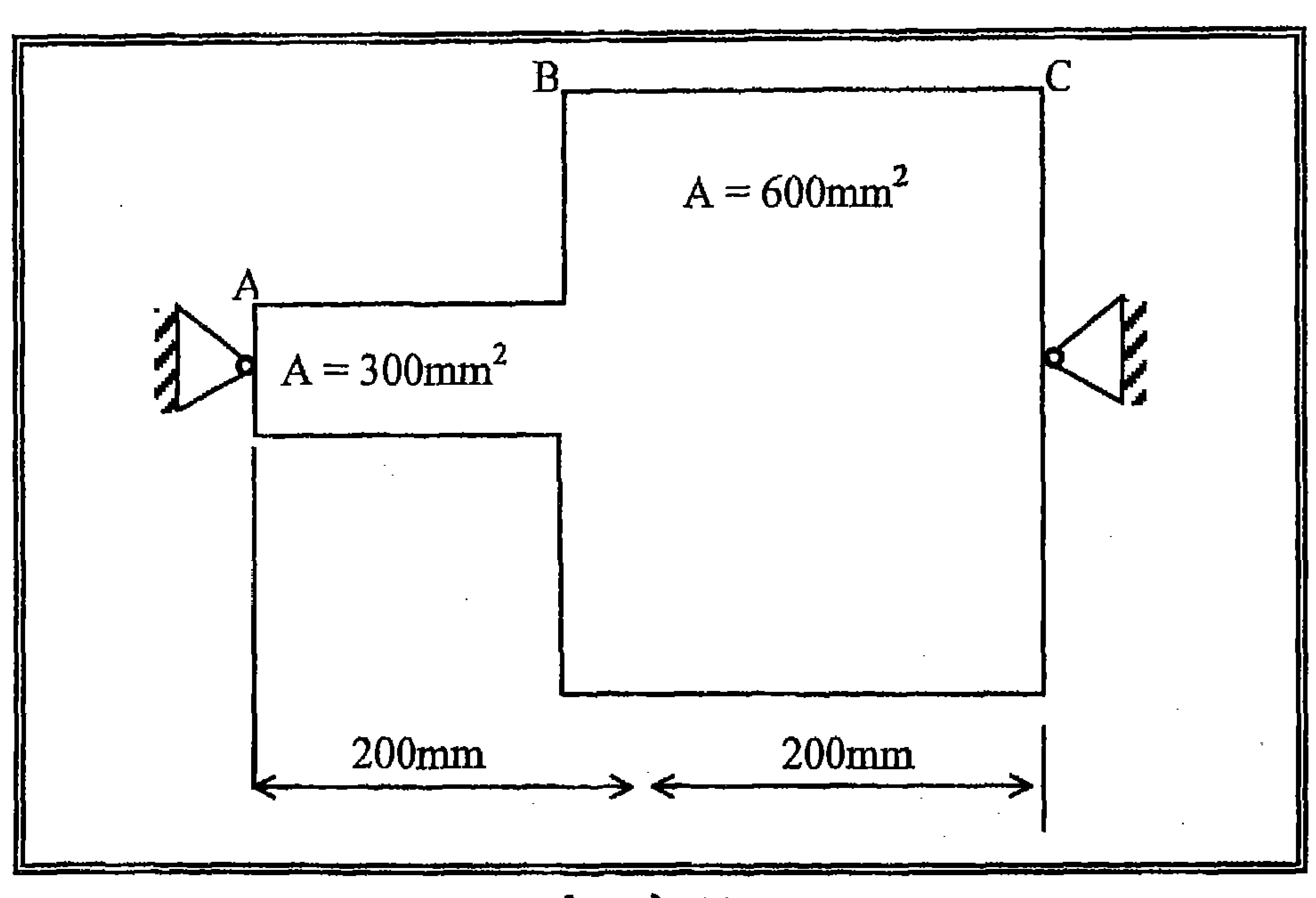
(3.3) يوضح الشكل (3-3) قطعة من الفولاذ معامل المرونة لها (200GPa) ومعامل التمدد الحرارية ($12.5 \times 10^{-6} 1/C°$) كانت درجة حرارتها (20C°) ثم أصبحت (-40C°) أوجد:

1- الإجهاد في المقطع (AB) والمقطع (BC).

2- الانفعال الحراري في القطعة كلها.

3- الانفعال الكلي في المقطع (AB) والمقطع (BC).

4- التشكل الحادث في المقطع (AB) والمقطع (BC).



شكل (3-3)

الحل:

نقوم بحساب فرق درجات الحرارة

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (-40) - (20) = {}^{-}60C^{o}.$$

نحسب مقدار التشكل الحراري بإهمال أحد المرتكزات (A) أو (C).

$$\delta_T = \alpha L \Delta T = 12.5 \times 10^{-6} \times 0.4 \times (-60).$$

$$= -3 \times 10^{-4}\ m$$

نقوم بحساب ردود الأفعال R_A و R_C، وتكون القوة في أي مقطع مساوية للمقطع الآخر:

$$R_A = P_A = R_C = P_C$$

نحسب مقدار التشكل الناتج عن ردود الأفعال ويكون حاصل جمع للتشكل الحادث على المقطع (AB) والمقطع (BC).

$$\Delta L_R = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC}$$

$$= \frac{R_A\ L_{AB}}{A_{AB}\,E_{AB}} + \frac{R_C\,L_{BC}}{A_{BC}\,E_{BC}}$$

$$= \frac{R_A\ L}{E} + \left(\frac{1}{A_{AB}} + \frac{1}{A_{BC}}\right)$$

$$= \frac{R_A \times 0.2}{200 \times 10^9}\left(\frac{1}{300 \times 10^{-6}} + \frac{1}{600 \times 10^{-6}}\right) = 5 \times 10^{-9} R_A$$

وبما أن القطعة غير محددة استاتيكياً لذا فإن مجموع التشكل الحادث من ردود الأفعال والتشكل الحراري يكون مساوياً للصفر.

$$\Delta L_R + \delta_T = 0$$

$$(5 \times 10^{-9} R_A) + (-3 \times 10^{-4}) = 0$$

$$R_A = (3 \times 10^{-4}) / (5 \times 10^{-9}) = 60KN$$

والآن نقوم بإيجاد المطلوب الأول:

$\sigma_{AB} = P/A_{AB} = (60 \times 10^3) / (300 \times 10^{-6}) = 0.2$ GPa

$\sigma_{BC} = P/A_{BC} = (60 \times 10^3) / (600 \times 10^{-6}) = 0.1$ GPa

نقوم الآن بإيجاد المطلوب الثاني وهو الانفعال الحراري على كامل القطعة:

$\varepsilon_T = \alpha\, \Delta_T = (12.5 \times 10^{-6})\,(-60) = -7.5 \times 10^{-4}$

وتكون الإشارة سالبة لأنه انفعال انكماش أو تقلص، نقوم الآن بإيجاد الانفعال الكلي الحادث للمقطع (AB) وهو عبارة عن الانفعال الناتج عن ردود الأفعال والانفعال الحراري.

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_T + \varepsilon_R = \varepsilon_T \left(\frac{\sigma_{AB}}{E}\right) = \left(-7.5 \times 10^{-4}\right) + \left(\frac{0.2 \times 10^9}{200 \times 10^9}\right)$$

$= (-7.5 \times 10^{-4}) + (1 \times 10^{-3}) = 2.5 \times 10^{-4}$

وبالمثل نحسب الانفعال الكلي الحادث للمقطع BC:

$(-7.5 \times 10^{-4}) + (5 \times 10^{-4}) = -2.5 \times 10^{-4}$

نلاحظ أن انفعال المقطع (AB) موجباً أي أنه انفعال تمدد، وانفعال المقطع (BC) سالباً أن أنه انفعال تقلص.

نحسب الآن مقدار التشكل الكلي الحادث على المقطع (AB).

$\Delta L_{AB} = \varepsilon_{AB} L_{AB} = (2.5 \times 10^{-4})\,(0.2) = 5 \times 10^{-5}$m

وتكون إشارته موجبة لأن التشكل الحادث هنا هو عبارة عن استطالة.

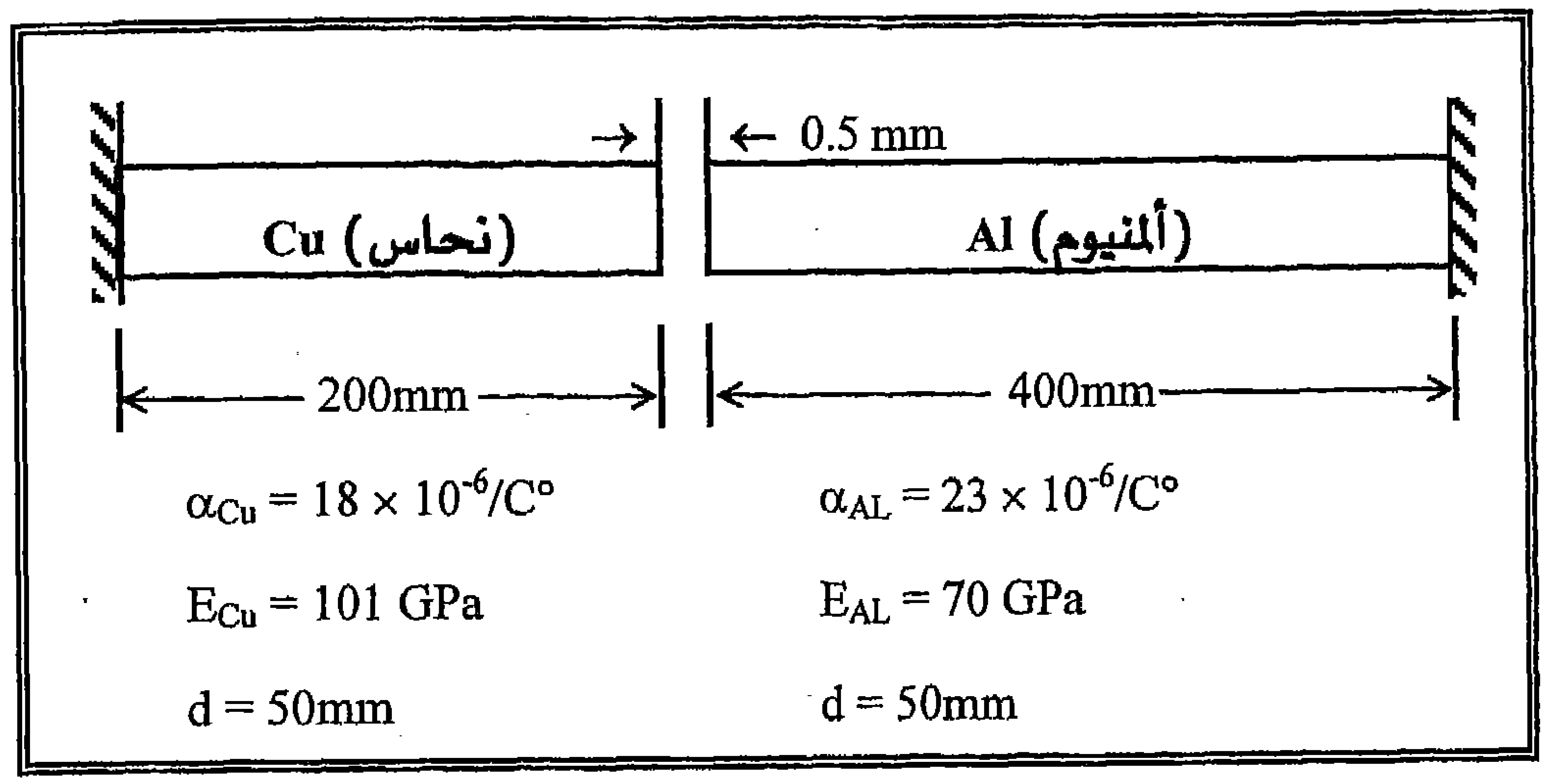
نحسب مقدار التشكل الكلي الحادث على المقطع (BC).

$\Delta L_{BC} = \varepsilon_{BC} L_{BC} = (-2.5 \times 10^{-4})\,(0.2) = -5 \times 10^{-5}$ m

والإشارة سالبة لأن التشكل هو عبارة عن تقلص في القطعة.

ملاحظة: إن مجموع التشكل الكلي الحادث على كامل القطعة (AC) يكون مساوياً للصفر لأن القطعة مثبتة من الطرفين ولا يسمح لها بالتمدد أو الانكماش.

(3.4): اسطوانتان أحدهما من الألمنيوم والثانية من النحاس تم تثبيتهما في جدار جسيء بحيث يكون بينهما فراغ مقداره 0.5mm، إذا كانت درجة حرارتهما الابتدائية 10°C وأنه تم تسخينهما حتى درجة 200°C، أوجد الاجهاد الحراري كذلك الطول النهائي لكل اسطوانة.



شكل (4-3)

الحل:

$$\delta_{T(AL)} = \alpha \Delta T L$$

$$= 23 \times 10^{-6} \times 190 \times 0.4$$

$$= 0.00175 m$$

$$= 1.75 \text{ mm}$$

$$\delta_{T(Cu)} = \alpha \Delta T L$$

$$= 18 \times 10^{-6} \times 190 \times 0.2$$

$$= 0.000684\text{m}$$

$$= 0.684\ \text{mm}$$

$$\delta_{T\,(net)} = 1.75 + 0.684 = 2.434\ \text{mm}$$

بما أنّ $0.5 < 2.434 = \delta_{T\,(net)}$.

∴ يحدث استطالة أكبر من الفراغ وبالتالي يتولد ردود فعل تُسبب إجهاد حراري.

$$\delta_{tot} = 2.434 - 0.5 = 1.934\ \text{mm}$$

R →	Cu	AL	← R

لإيجاد التشكل الناتج عن ردود الفعل:

$$\Delta L_R = \frac{-R \times 0.4}{\pi\,(0.025)^2 \times 70 \times 10^9} - \frac{R \times 0.2}{\pi\,(0.025)^2 \times 101 \times 10^9}$$

$$= -3.9 \times 10^{-9}\ R$$

$$1.934 \times 10^{-3} = 3.9 \times 10^{-9}\ R$$

$$R = 495.9\ \text{KN}$$

$$\sigma_{AL} = \frac{495.9 \times 10^3}{\pi\,(0.025)^2} = 252.5\text{MPa}$$

$$\sigma_{Cu} = \frac{495.9 \times 10^3}{\pi\,(0.025)^2} = 252.5\text{MPa}$$

$$L_{AL\,(final)} = 0.4 + 0.00175 - \frac{495.9 \times 10^3 \times 0.4}{\pi\,(0.025)^2 \times 70 \times 10^9}$$

$= 0.4003\text{m}$

$= 400.3\text{mm}$

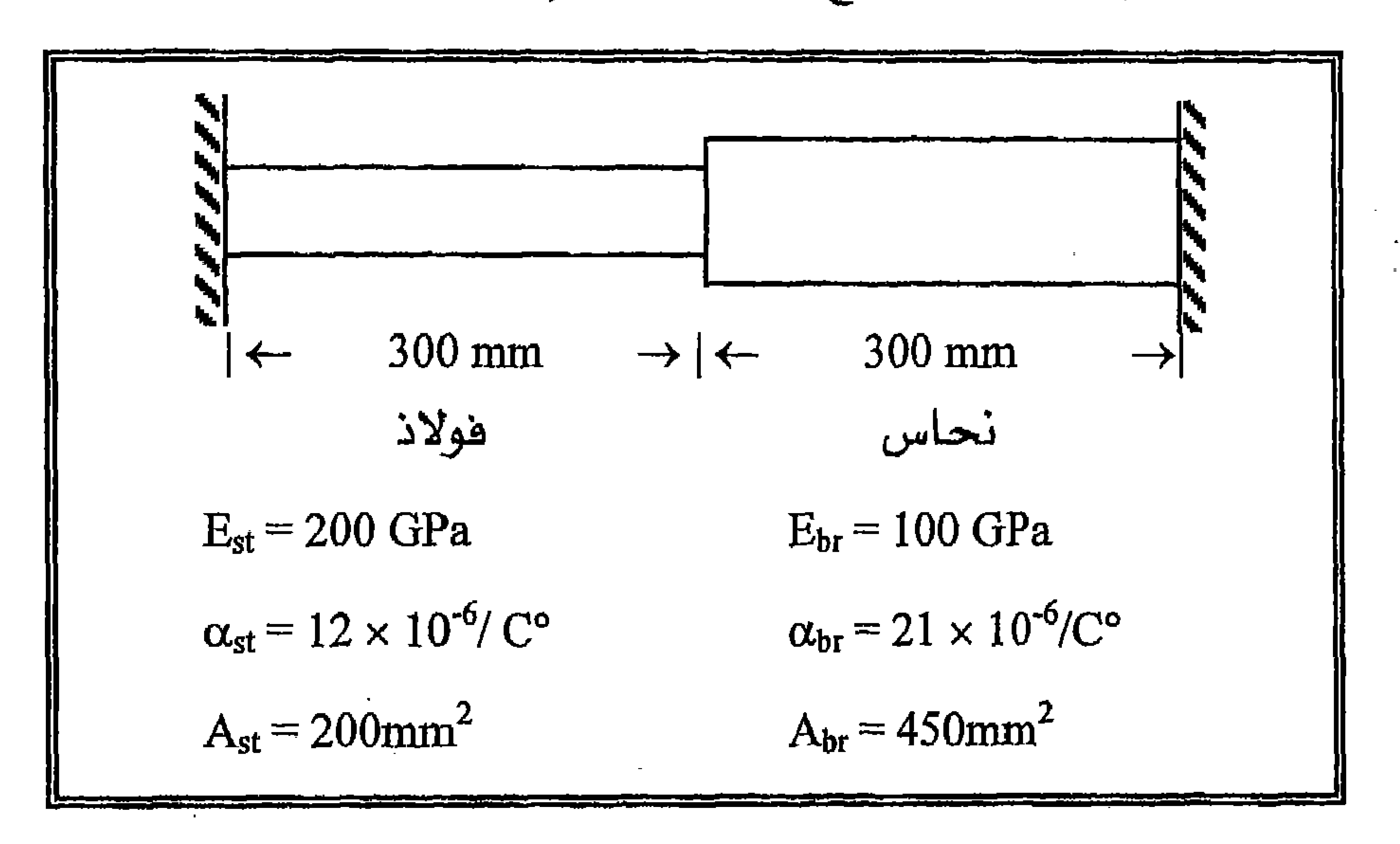
$$L_{cu\,(final)} = 0.2 + 0.000684 - \frac{495.9 \times 10^3 \times 0.2}{\pi\,(0.025)^2 \times 101 \times 10^9}$$

$= 0.20018\text{m}$

$= 200.18\text{mm}$

مسائل إضافية:

(3.1): قضيبان مصنوعان من مادتين مختلفتين تم وصلهما معاً وتثبيتهما بين جدارين عندما كانت درجة الحرارة $T_1 = 10C°$، أوجد القوة المؤثرة على نقاط التثبيت عندما ترتفع درجة الحرارة إلى $20C°$.



شكل (3-5)

(3.2) قضبان سكة حديدية من الصلب وضعت بحيث تكون نهايتها المتجاورة على بعد (4mm) عندما تكون درجة الحرارة (25C°) وطول كل قضيب

(16m) والمادة المصنوع منها القضبان لها معامل مرونة (200GPa) و($\alpha = 12 \times 10^{-6}\ 1/C$)، احسب بإهمال الانبعاج.

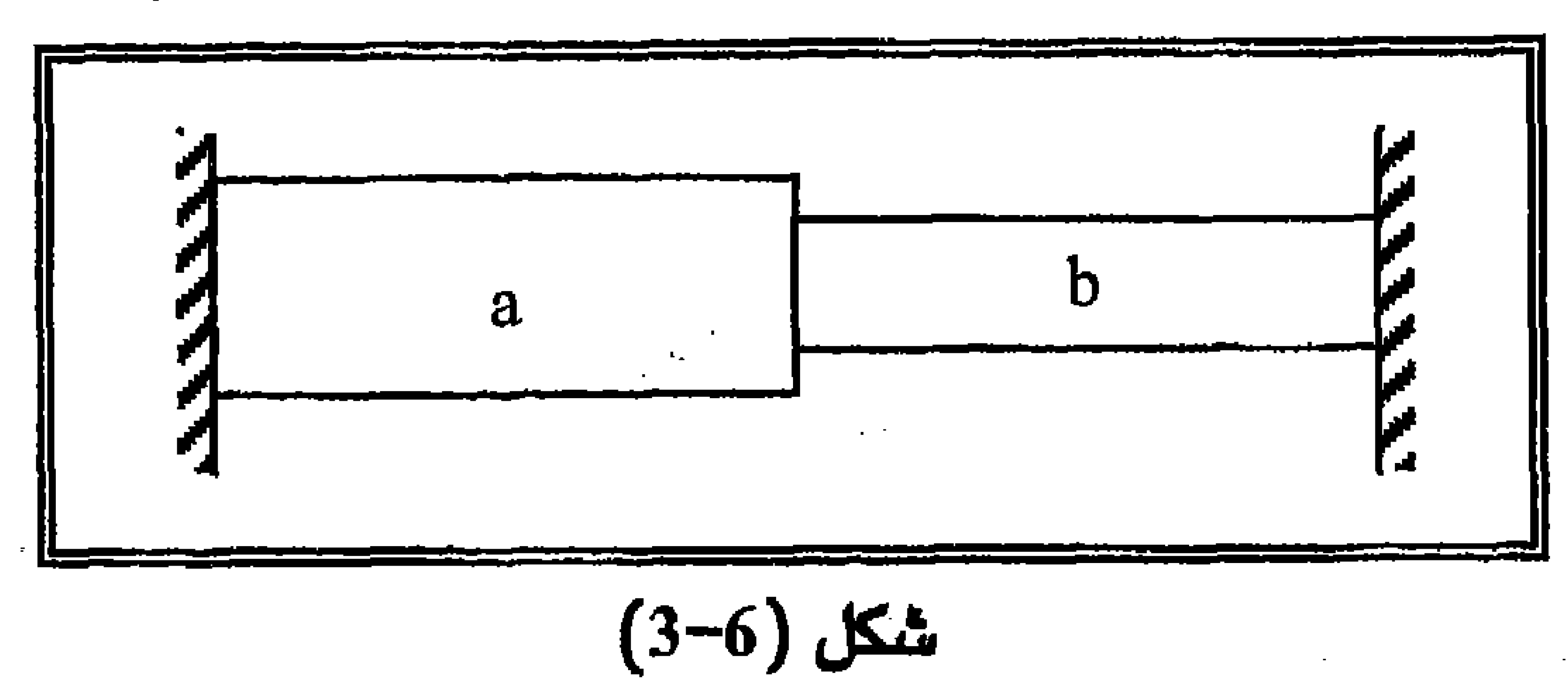
أ- الفجوة بين نهايتين متجاورتين عندما تكون درجة الحرارة (-10C°).

ب- عند أي درجة حرارة يحدث التلامس بين نهايتين متجاورتين.

جـ- إجهاد الضغط في القضبان عندما تكون درجة الحرارة (45C°).

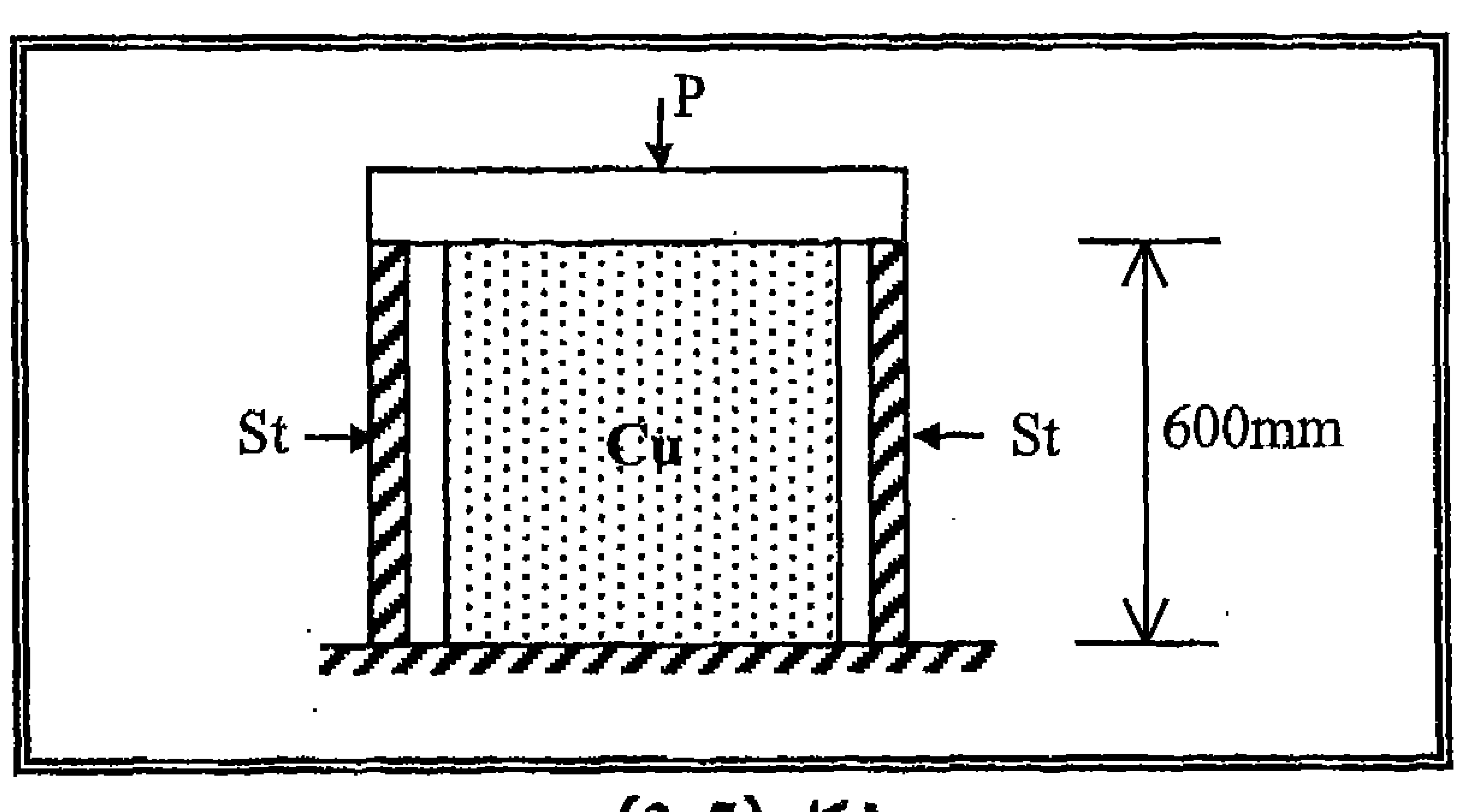
(3 .3) قضيب من النحاس مقطعه المستعرض مساحته منتظمة وتساوي ($200mm^2$)، ومثبت بالحائط من الجانبين تثبيتاً تاماً، ولا توجد في القضيب أي إجهادات وأن طوله (3m) عند (25C°) فاحسب الاجهادات في هذا القضيب الناتجة عن هبوط درجة الحرارة إلى (10C°) إذا علمت أن معامل المرونة للنحاس (120GPa) و($\alpha = 2 \times 10^{-5} 1/C°$).

(3 .4) القضيب المركب الموضح في الشكل (3-6) مثبت تثبيت تام من الجهتين، الجزء (a) من النحاس مساحة مقطعه منتظمة وتساوي ($8000mm^2$) وطوله (350mm) والجزء (b) من الألمنيوم مساحة مقطعه منتظمة وتساوي ($250mm^2$) وطوله (250mm). عند درجة حرارة (25C°)، كانت المجموعة خالية من الاجهادات فإذا هبطت درجة الحرارة فإن الدعامة اليمنى تتحرك إلى اليمين بمقدار (0.3mm) في اتجاه المعدن المتقلص. أحسب أقل درجة حرارة يمكن أن يتعرض لها هذا القضيب المركب بحيث لا يزيد الإجهاد في الألمنيوم عن (160MPa) إذا علمت أن معامل المرونة للنحاس (120GPa) و ($\alpha = 2 \times 10^{-5} 1/C°$).



شكل (3-6)

(3 .5) تم تعريض مجموعة مكونة من اسطوانة مجوفة من الصلب تحيط باسطوانة مصمتة من النحاس إلى حمل محوري مقداره (250KN) مساحة المقطع الصلب ($2500mm^2$) وللنحاس ($6000mm^2$)، قبل تأثير الحمل كانت الاسطوانتين متساويتين بالطول عند (600mm)، احسب الزيادة المطلوبة في درجة حرارة النظام كله بحيث يؤثر كل الحمل على اسطوانة النحاس فقط، لوحة الغطاء أعلى المجموعة جاسئ، إذا علمت أن للنحاس ($\alpha = 2 \times 10^{-5} 1/C°$). و ($E = 120GPa$). وللصلب ($E = 200GPa$) و ($\alpha = 1.2 \times 10^{-5} 1/C°$).



شكل (7-3)

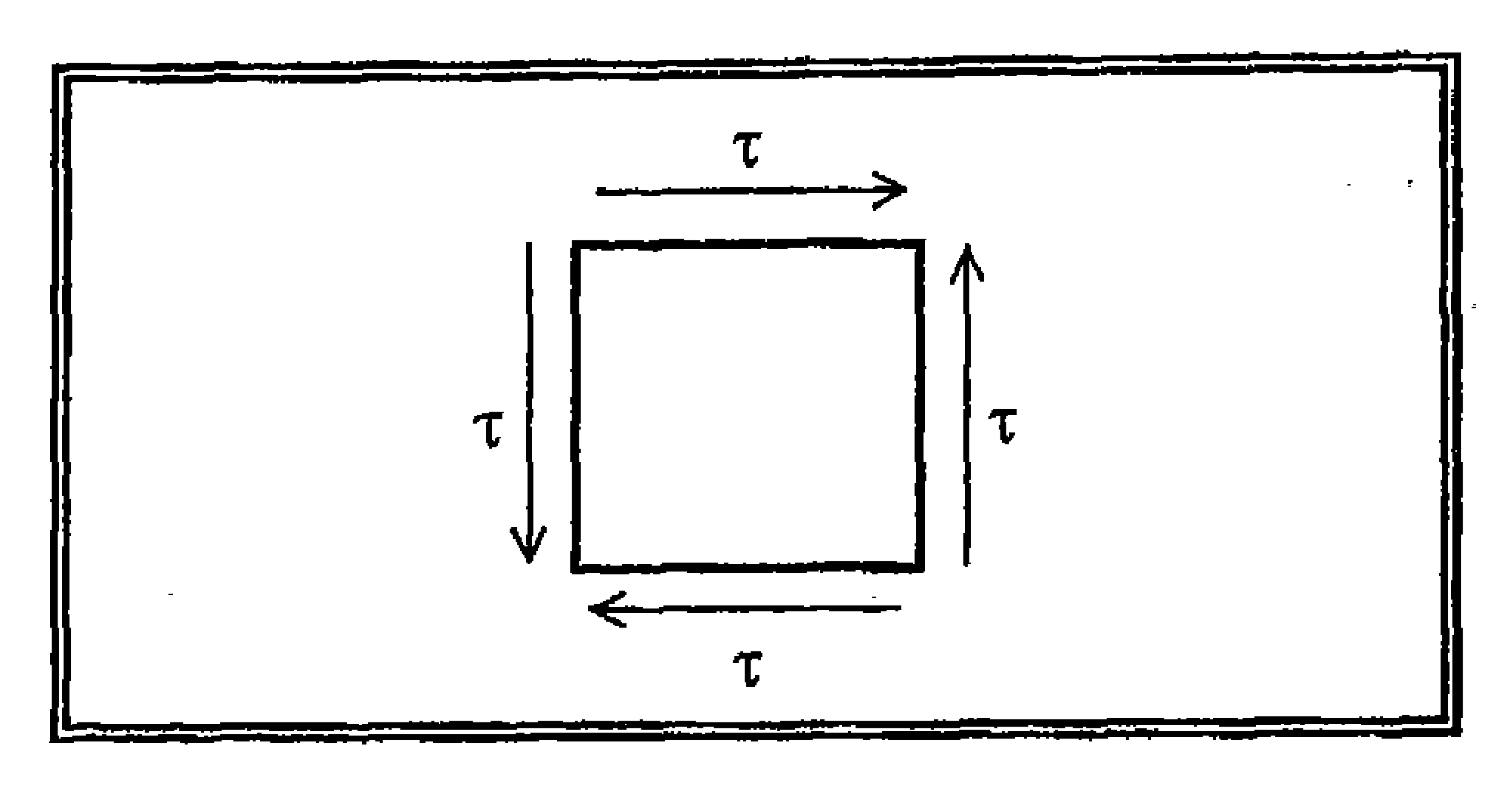
الوحدة الرابعة

إجهاد القص وانفعال القص

الوحدة الرابعة

إجهاد القص وانفعال القص

إذا أثرت في جوانب الجسم إجهادات، مماسية فقط الشكل (1-4) فإن هذا النوع من حالة الإجهاد يسمى بالقص المباشر (Shearing Strress)، ويرمز له بالرمز (τ)، وتسمى المساحات التي تؤثر فيها الإجهادات المماسية فقط، بمساحات القص المباشرة.



شكل (1-4)

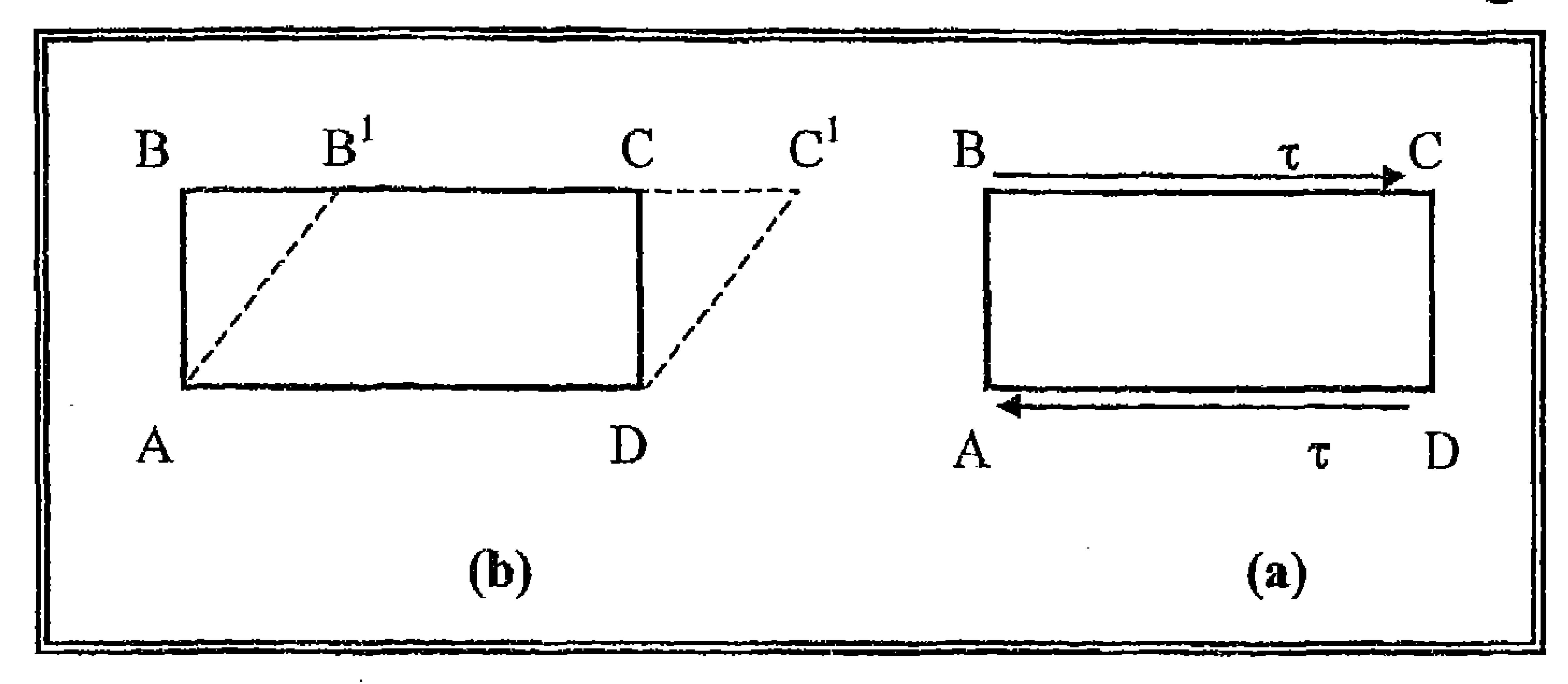
(1-4) الاجهادات والانفعالات ومعامل الصلابة وطاقة الانفعال في حالة القص المباشر:

تسمى القوى التي تسلط على امتداد مستوى يمر خلال جسم ما قوة القص (Shearing Force) ويرمز لها بالرمز (V). لذلك يكون إجهاد القص مساوياً لقوة القص مقسومة على مساحة القص، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\tau = V / A \quad \text{.......(4-1)}$$

ومن الأمثلة العملية على إجهاد القص، عمليات الثقب، الوصلات المبرشمة والملحومة.

نبحث الآن تشوهات القص، فالجزء (ABCD) مستطيل قبل التشوه (الشكل (4-2-a)) ثم يأخذ بعد تشوه القص الشكل (AB'C'D) بافتراض أن الضلع (AD) مثبت.



الشكل (4-2)

وتسمى الزاوية (γ) بالتشوه الزاوي أو زاوية القص أو انفعال القص، ويعرف على أنه مقدار التغيير في زاوية جزء من مستطيل،وانفعال القص لا بعدي ويقاس بالراديان (Rad).

وقد أظهرت التجارب أنه بالنسبة لكثير من المواد، حتى حدود معينة من التحميل هناك علاقة خطية بين إجهادات القص وانفعالات القص، والتي يعبر عنها قانون هوك لحالة القص وهي:

$$\tau = \gamma G \quad \text{......................................} (4\text{-}2)$$

حيث أن المعامل الثابت (G) يسمى بمعامل المرونة القصي أو معامل السجاءة أو معامل الصلابة، وهو يبيّن قابلية المادة لمقاومة تشوهات القصي، ووحدته هي نفسها وحدة إجهاد القص (N/m^2) أو (Pa).

إن العلاقة الخطية بين (τ) و (γ) تبقى سارية المفعول ما دامت إجهادات القص لا تتجاوز حد التناسب عند القص.

لا تقتصر إجهادات القص على المستويات الأفقية الموازية لقوة القص فقط، بل ستحدث أيضاً على مستويات عمودية عليها، وبالتالي يرافق إجهاد القص على مستوى معين إجهاد قص متمم على المستويات المتعامدة على المستوى الأول، وتكون هذه الإجهادات على المستويين الآخرين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالاتجاه، بحيث يبقى التشوه الحاصل للجسم من أثر ذلك الإجهاد على المستوى الأول.

تحسب طاقة الانفعال الكامنة الناتجة عن انفعال القصي (U) من المعادلة التالية:

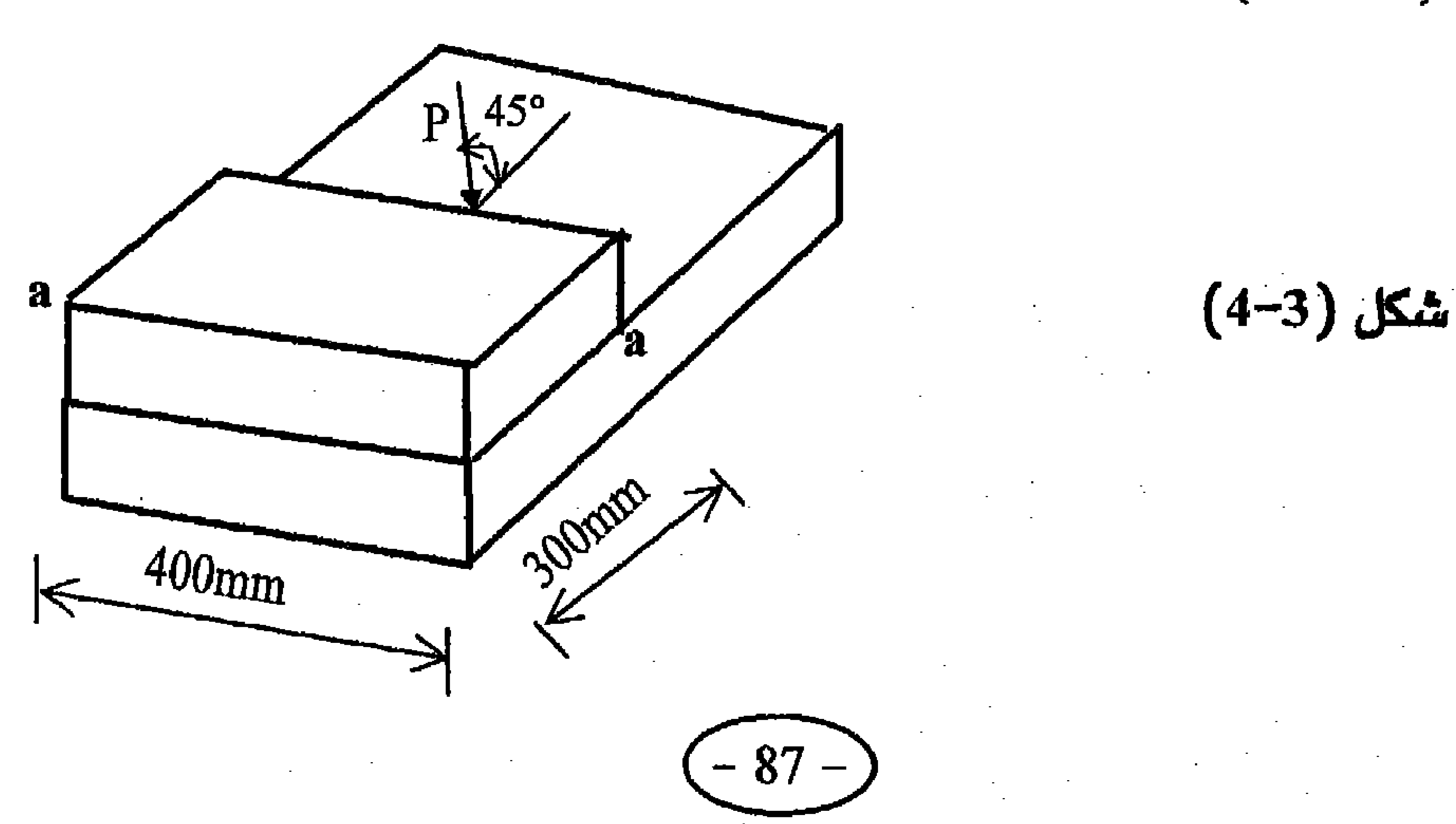
$$U = \tau^2 / 2G = G\gamma^2 / 2 \quad \text{......} (4\text{-}3)$$

وتكون وحدتها هي نفس وحدة إجهاد القص (Pa) أو (N/m^2). كما وجد أنه للمواد المتجانسة أنه هناك علاقة تربط بين كل من معامل المرونة القصي (G) ومعامل المرونة (E) وهي:

$$G = E / [2 (1 + v)] \quad \text{......} (4\text{-}4)$$

أمثلة محلولة:

(4 .1) تقوم القوة (P) بقص اللوح على المستوى (a-a)، (الشكل (3-4))
احسب إجهاد القص على المستوى (a-a) إذا علمت أن القوة (P) تساوي (100KN).



شكل (3-4)

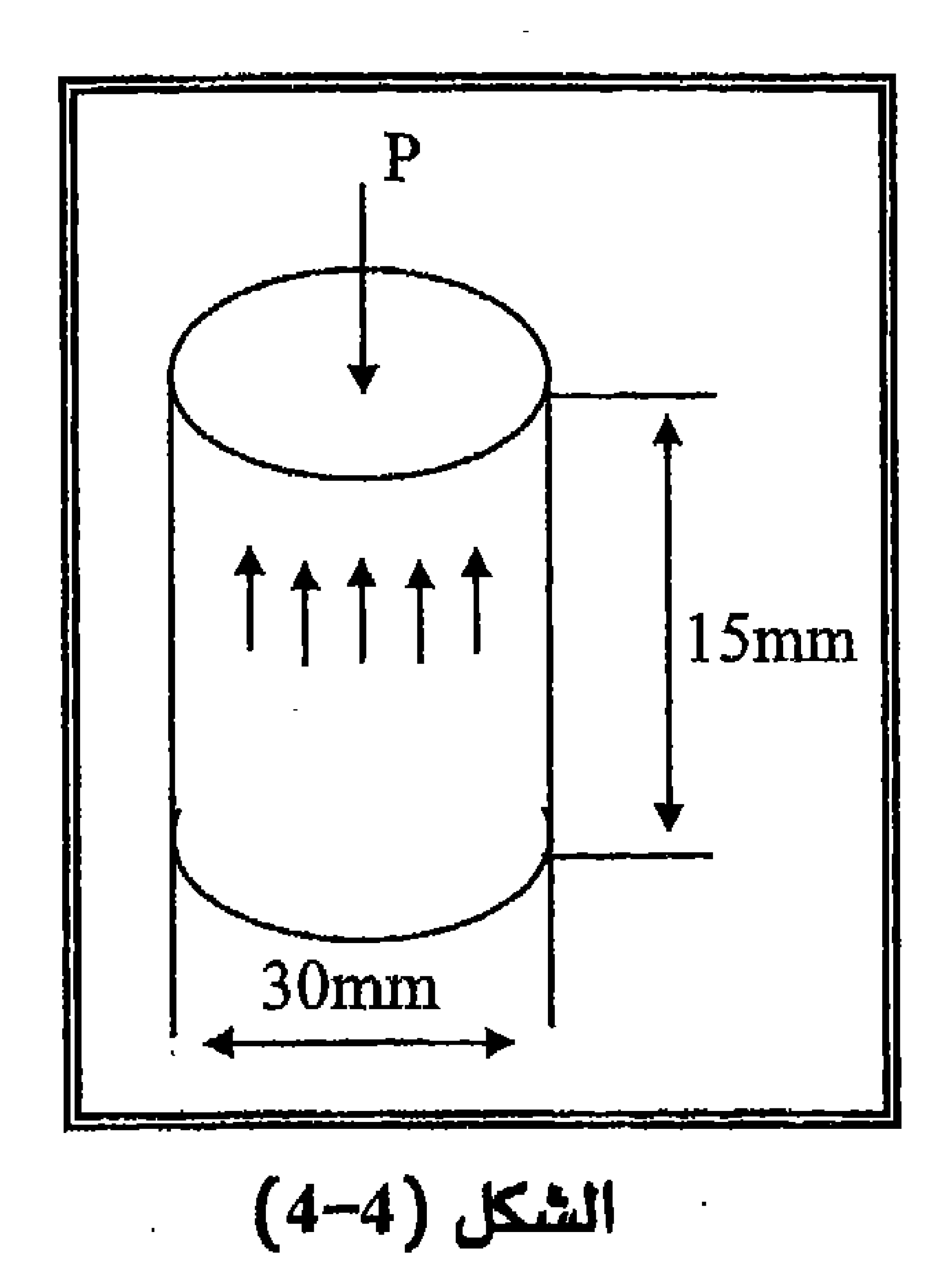
الحل:

المركبة الأفقية للقوة (P) فقط هي التي تحدث القص على المستوى (a-a) لذلك يكون إجهاد القص مساوياً لـ:

$$\tau = P\cos\theta / A = [(100 \times 10^3)(\cos 45)] / [0.3 \times 0.4].$$

$$= 0.59 \text{ MPa}$$

(4 .2) ما هي مقدار القوة (P) اللازمة لثقب حفرة قطرها (30mm) خلال لوح من الصلب سمكه (15mm) ومقاومة القص القصوى له (300MPa)، ومعامل الجساءة لهذه المادة يساوي (85GPa)، وأوجد كذلك انفعال القص عند حافة الحفرة عندما يكون إجهاد القص يساوي (100MPa)، الشكل (4-4)، أوجد أيضاً طاقة الانفعال الكامنة.



الشكل (4-4)

الحل:

تكون مساحة القص عبارة عن محيط الدائرة (πD) في عمق الثقب (t) وبذلك تكون مساحة القصي مساوية لـ:

$$A = \pi Dt = \pi(30 \times 10^{-3})(15 \times 10^{-3}) = 1.414 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

وبالتالي يمكن حساب قوة القص بالاستناد إلى المقاومة القصوى للقص حيث أن الثقب قد حدث:

$$P = \tau A = (300 \times 10^6)(1.414 \times 10^{-3}) = 0.424 \text{MN}.$$

أما في الحالة الثانية فإن قيمة إجهاد القص أقل من المقاومة القصوى للقص، وبالاستناد إلى معامل الصلابة نقوم بحساب انفعال القص:

$$\gamma = \tau / G = (100 \times 10^6) / (85 \times 10^9) = 1.76 \times 10^{-3} \text{ Rad.}$$

وتحسب طاقة الانفعال الكامنة الناتجة عن انفعال القص مباشرة كالتالي:

$$U = \tau^2 / 2G = (100 \times 10^6)^2 / [(2)(85 \times 10^9)] = 58.82 \text{ KPa.}$$

2- 4) إجهاد القص في حالة الوصلات المبرشمة:

سنبحث الطرق العملية الأساسية لحساب القص في الوصلات المبرشمة وهناك طريقتين للربط باستعمال البراشيم وهما:

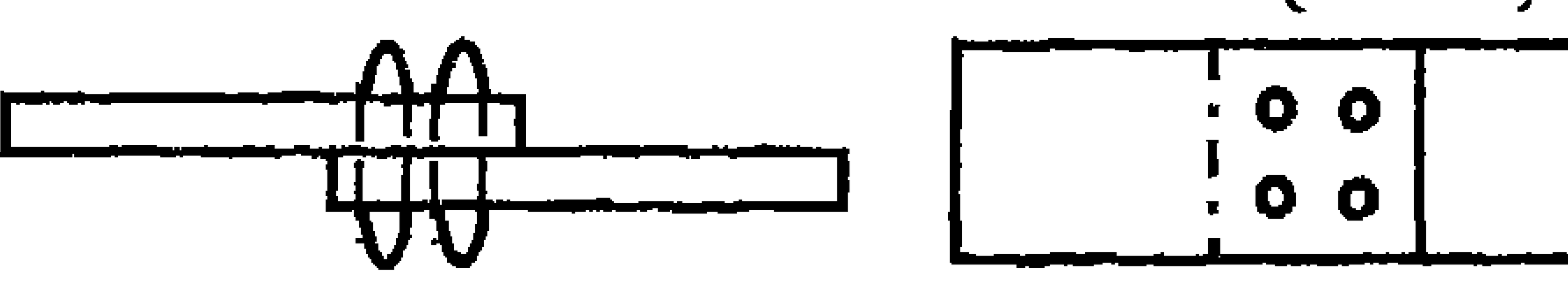
أ- الوصل المتطابق (المتداخل):

ويتم وصل العضو مع العضو الآخر بمسامير برشمة، وتكون هذه المسامير على شكل صفوف مستقيمة أو متعرجة، ومن أنواع هذه الوصلات:

1- الوصلة المفردة شكل (4-5-a).

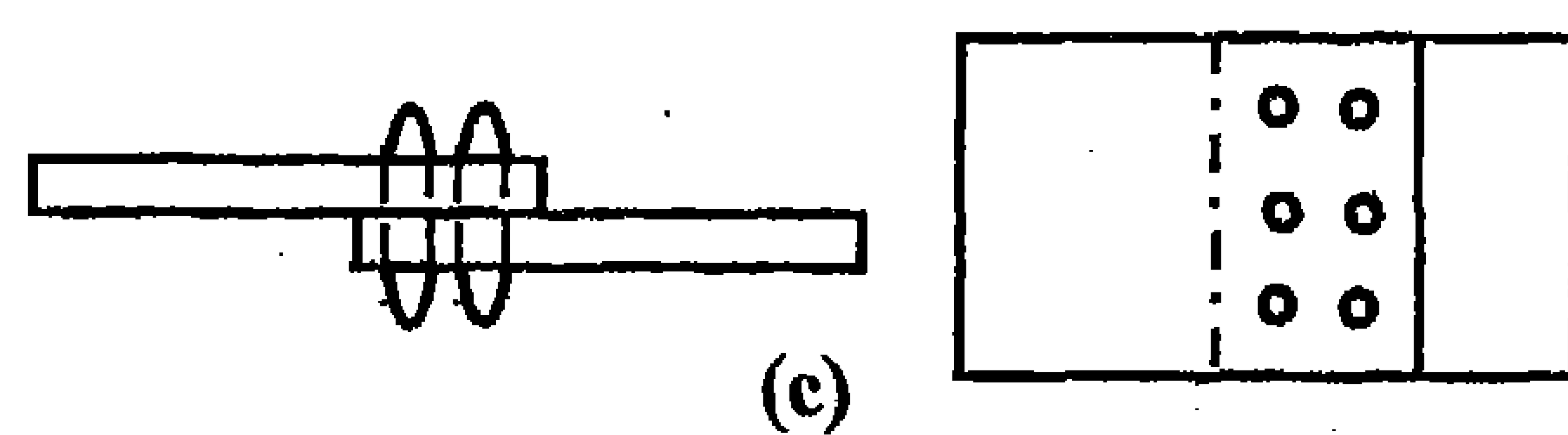
(a)

2- الوصلة المزدوجة الشكل (4-5-b).



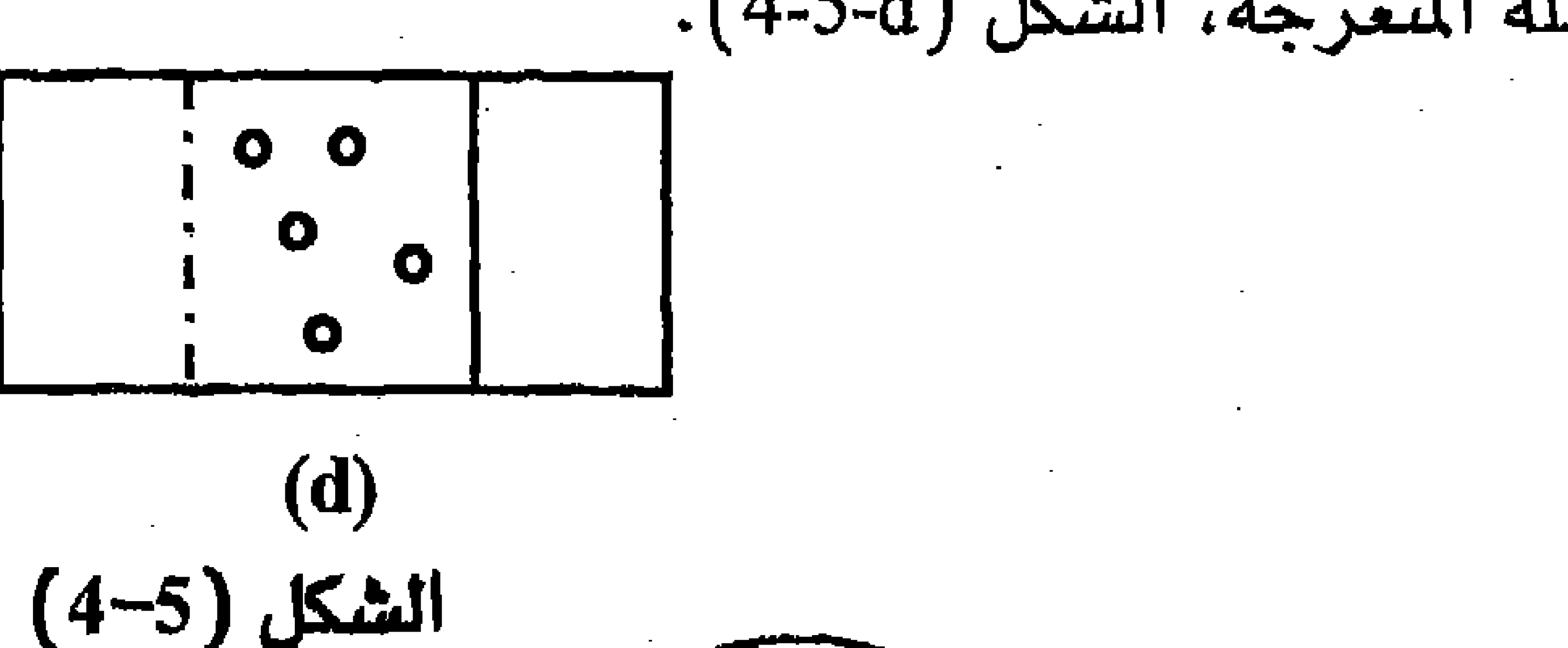
(b)

3- الوصلة المتعددة، الشكل (4-5-c).



(c)

4- الوصلة المتعرجة، الشكل (4-5-d).



(d)

الشكل (4-5)

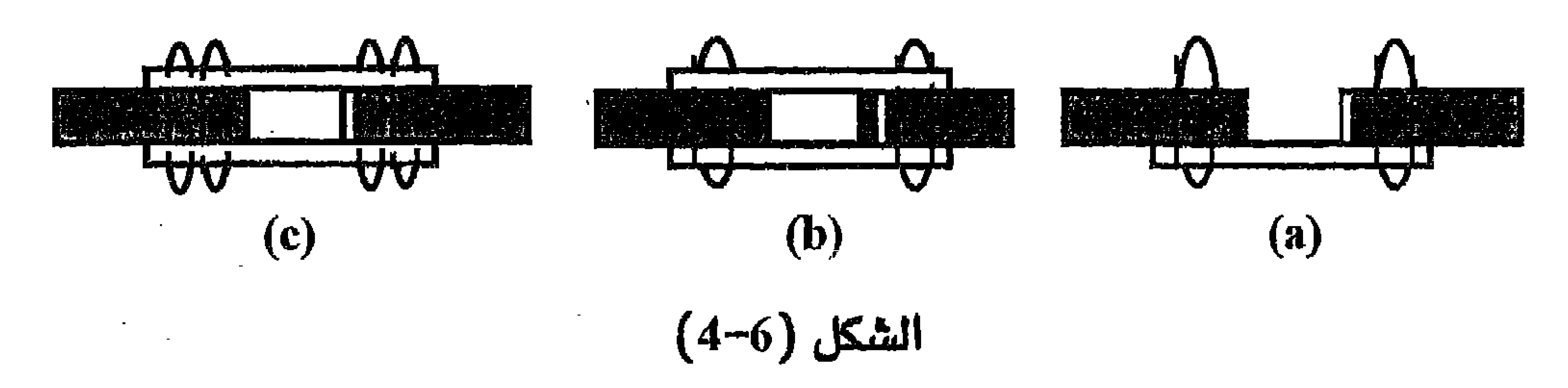
ب- الوصل المعشق:

ويتم وضع العضوان في مستوى واحد ويقبض عليهما لوح تجميع من جانب واحد أو من جانبين، ومن أشكالها:

1- وصلة تعشيق مفردة بلوح تجميع من جانب واحد، الشكل (4-6-a).

2- وصلة تعشيق مفردة بلوح تجميع من جانبين، الشكل (4 -6-b).

3- وصلة تعشيق مزدوجة من جانبين، الشكل (4 -6-c).

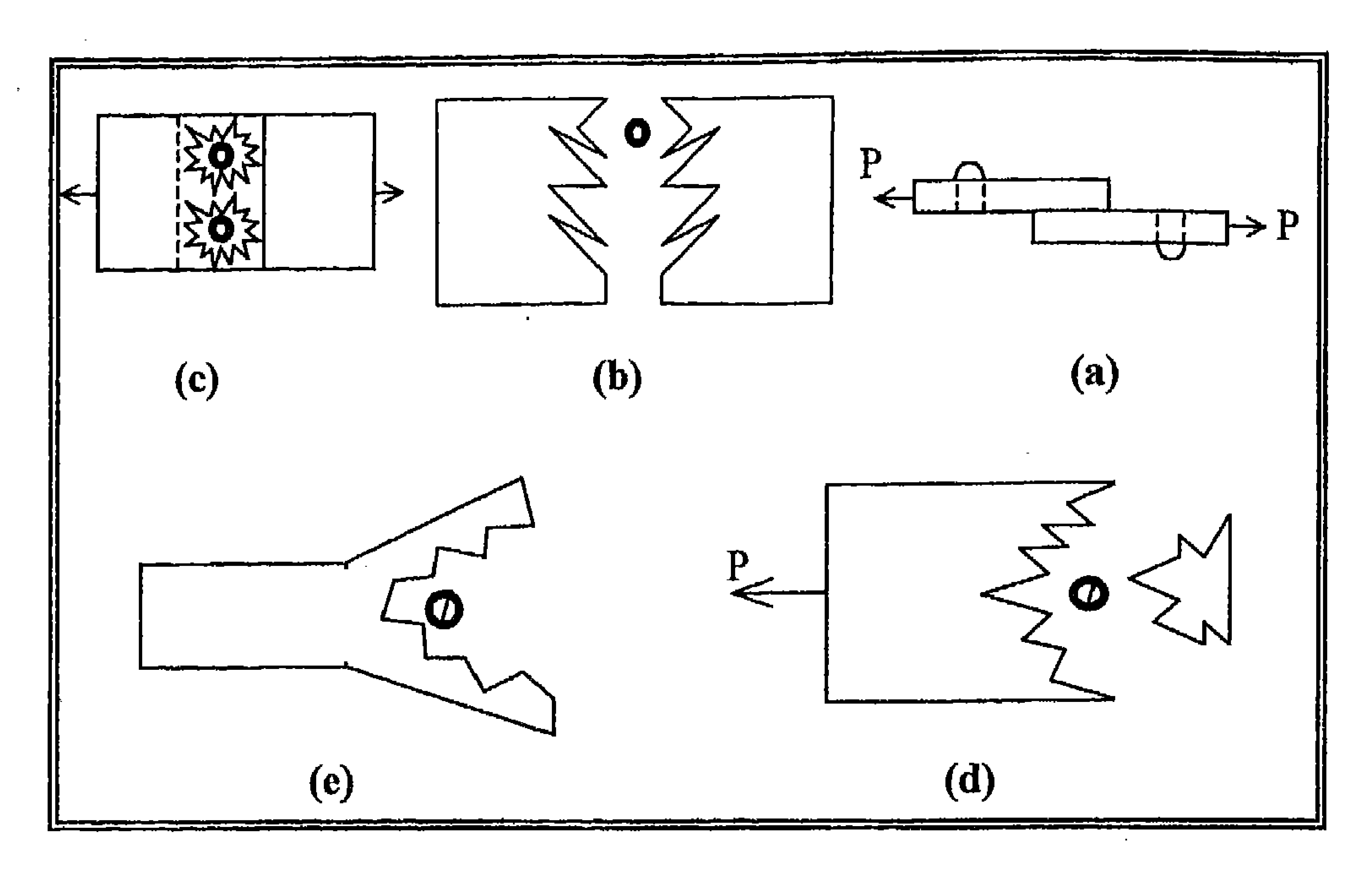


الشكل (4-6)

4-2-1) طرق وأشكال فشل وانهيار الوصلات المبرشمة:

1- انهيار القص للمسمار (البرشام): ويحدث ذلك عندما تزداد قوة القصي على قطاع المسمار عن المقاومة القصوى لمادة المسمار، الشكل (4-7-a).

عندما تكون الوصلة مزدوجة أو متعددة فإن الحمل الأكبر يكون على المسامير الموجودة في الصف الأول، وتكون أكثر بحوالي (2.5) مرة من قوى القص في المسامير في الصفوف الأخرى، ولكن التجارب أظهرت أنه عند تأثر الحمل الاستاتيكي فإن المسامير تتحطم في وقت واحد، وهذا يفسر بأنه قبل لحظة الانهيار يحدث تساوي للقوى نتيجة للدونة المادة وكذلك نتيجة الفراغات (الخلوصات) الموجودة بين المسامير والألواح.



شكل (4-7)

2- تمزق عضو الشد ويحدث ذلك عند ازدياد إجهاد الشد على القطاع الصافي، ويحدث تمزق للوح دون قص للمسمار، شكل (4-7-b).

3- فشل الارتكاز بين الصفيحة والبرشام: ويحدث عند ازدياد إجهاد الارتكاز بين جسم المسمار واللوح عن مقاومة الارتكاز القصوى لمعدن اللوح فيحدث شرخ وتكسر للوح عند موضع ارتكاز المسمار في اللوح، شكل (4-7-c).

4- انهيار القص للوح: ويحدث مثل هذا النوع من الانهيار عندما تكون المسافة الطرفية بعد آخر مسمار غير كافية لمقاومة الحمل فيحدث عندها الانهيار محدثاً قصاً للوح، شكل (4-7-d).

5- شرخ اللوح: هذا النوع من الانهيار وهو مشابه للنوع السابق حيث يحدث الشرخ في اللوح (الشكل (4-7-e)) وذلك لأن المسمار يكون قريباً من طرف اللوح.

4-2-2) الاعتبارات المتبعة عند تصميم الوصلات:

بعد التعرف على أنواع الفشل في الوصلات المبرشة صار واجباً أن نعرف الاعتبارات المتبعة عند تصميم هذه الوصلات، حيث يؤخذ بعين الاعتبار أدنى قيمة من بين كل من الآتي:

1- قوة القص للمسمار (τ).

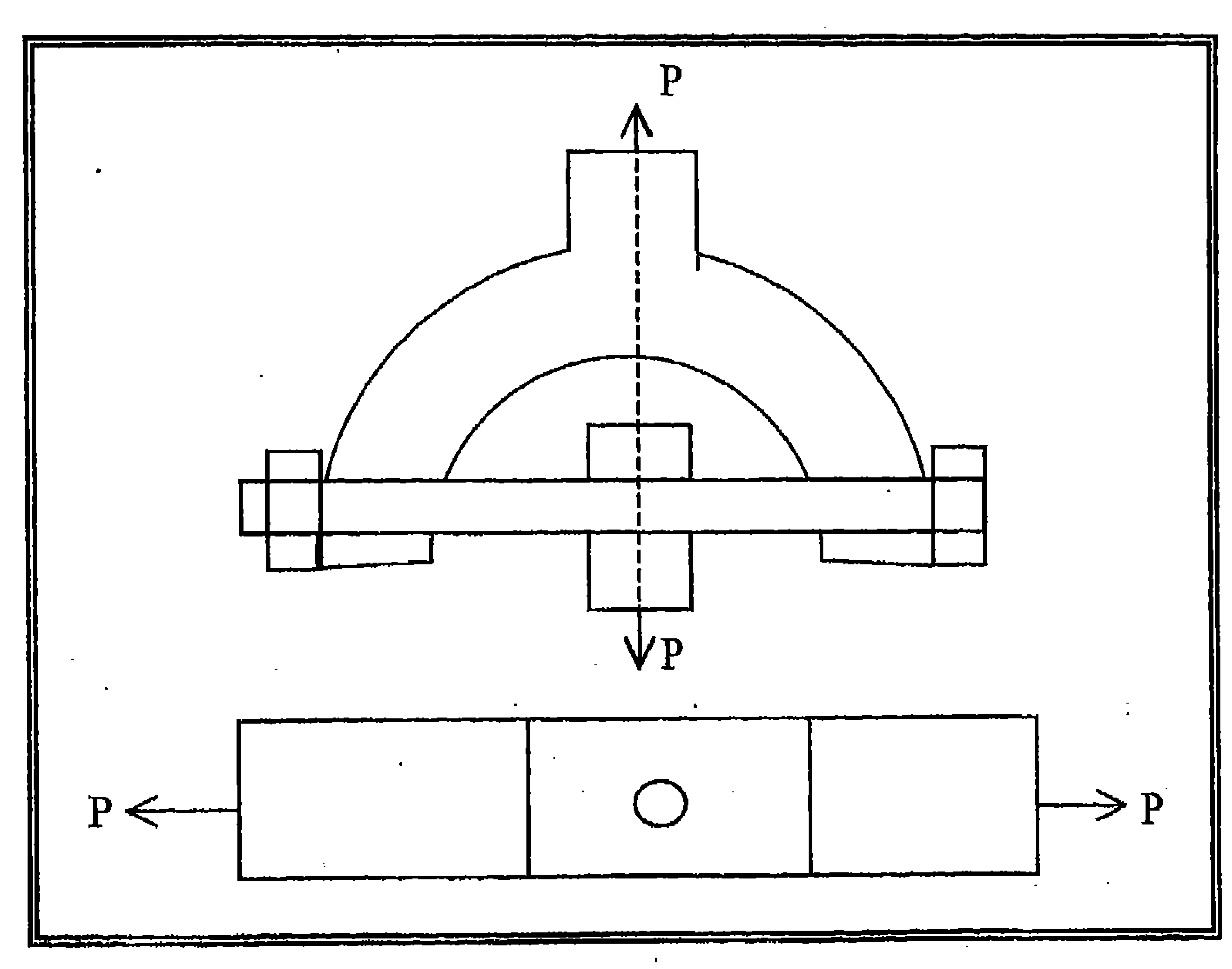
2- مقاومة الارتكاز بين المسمار واللوح (σ_b).

3- مقاومة الشد (σ_t).

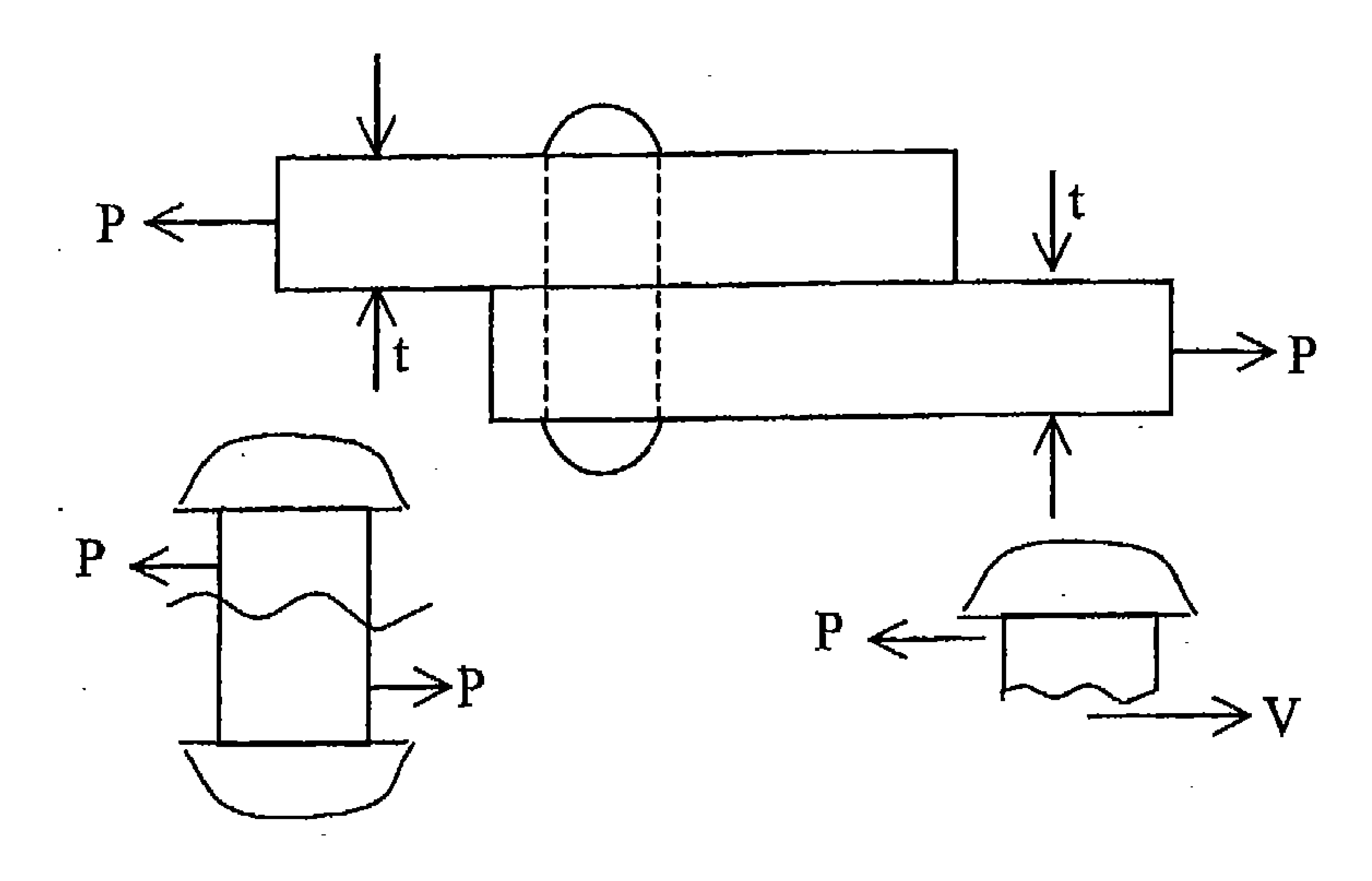
أولاً: مقاومة القص في المسمار:

يقاوم المسمار القص بإحدى الطريقتين:

1- القص المفرد (Single Shear):



شكل (4-8)



$$\tau = V / A = P / A \text{ ......} (4\text{-}5)$$

حيث أن:

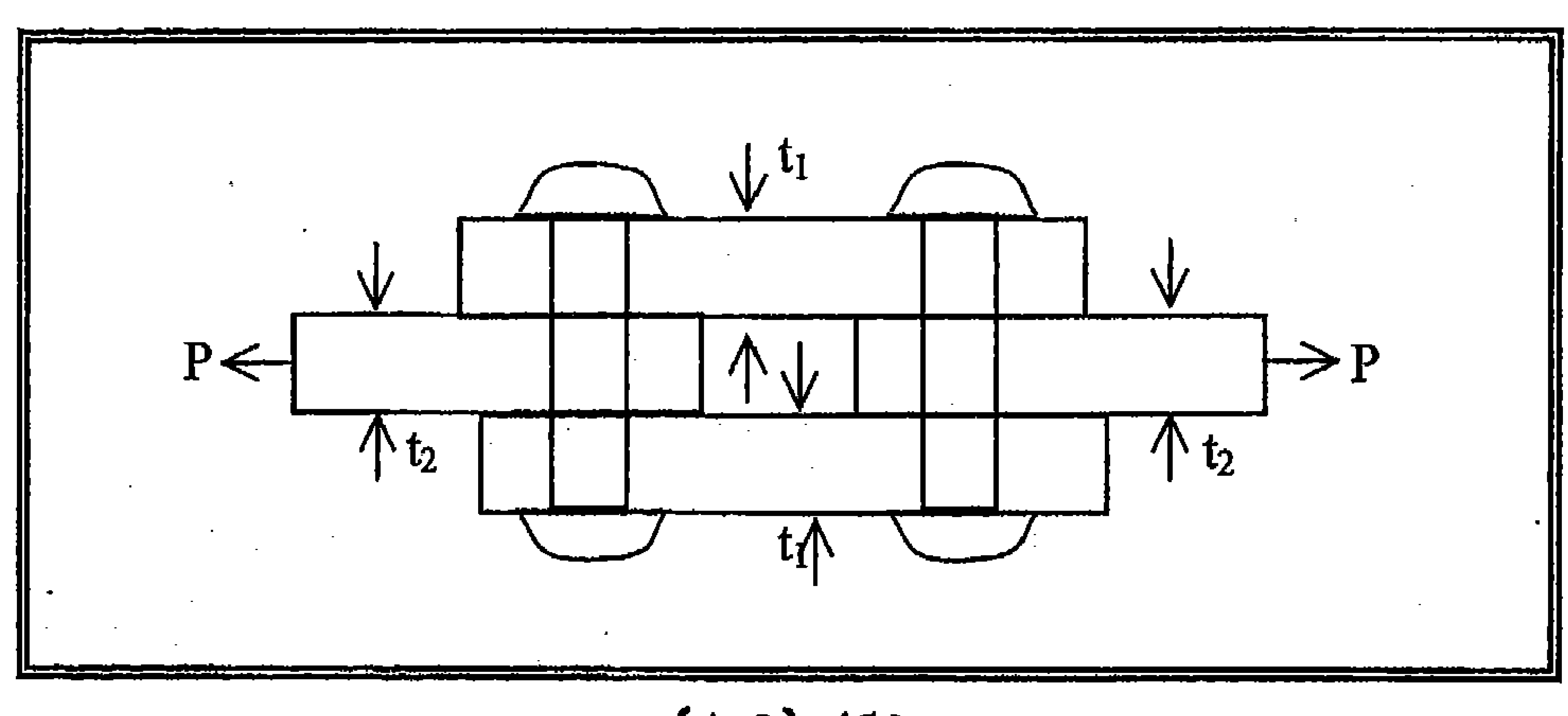
τ: إجهاد القص لمعدن المسمار $\left(\frac{N}{m^2}\right)$ أو (Kg/cm^2).

A: مساحة مقطع المسمار (m^2) أو (cm^2).

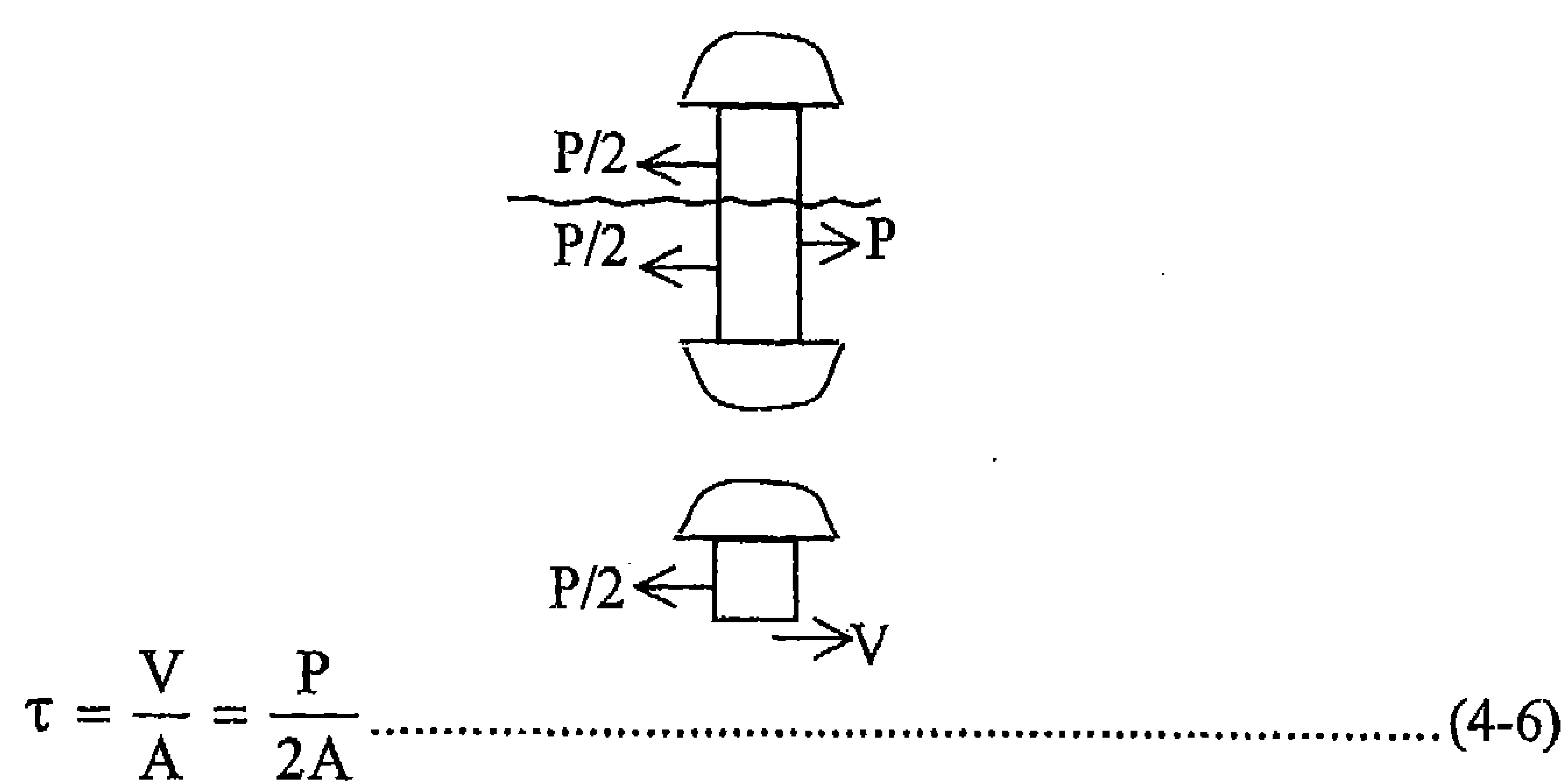
V: قوة القص المفرد (N) أو (Kg).

وهذا النوع موضح بالشكل (4-8).

2- القص المزدوج (Double Shear):



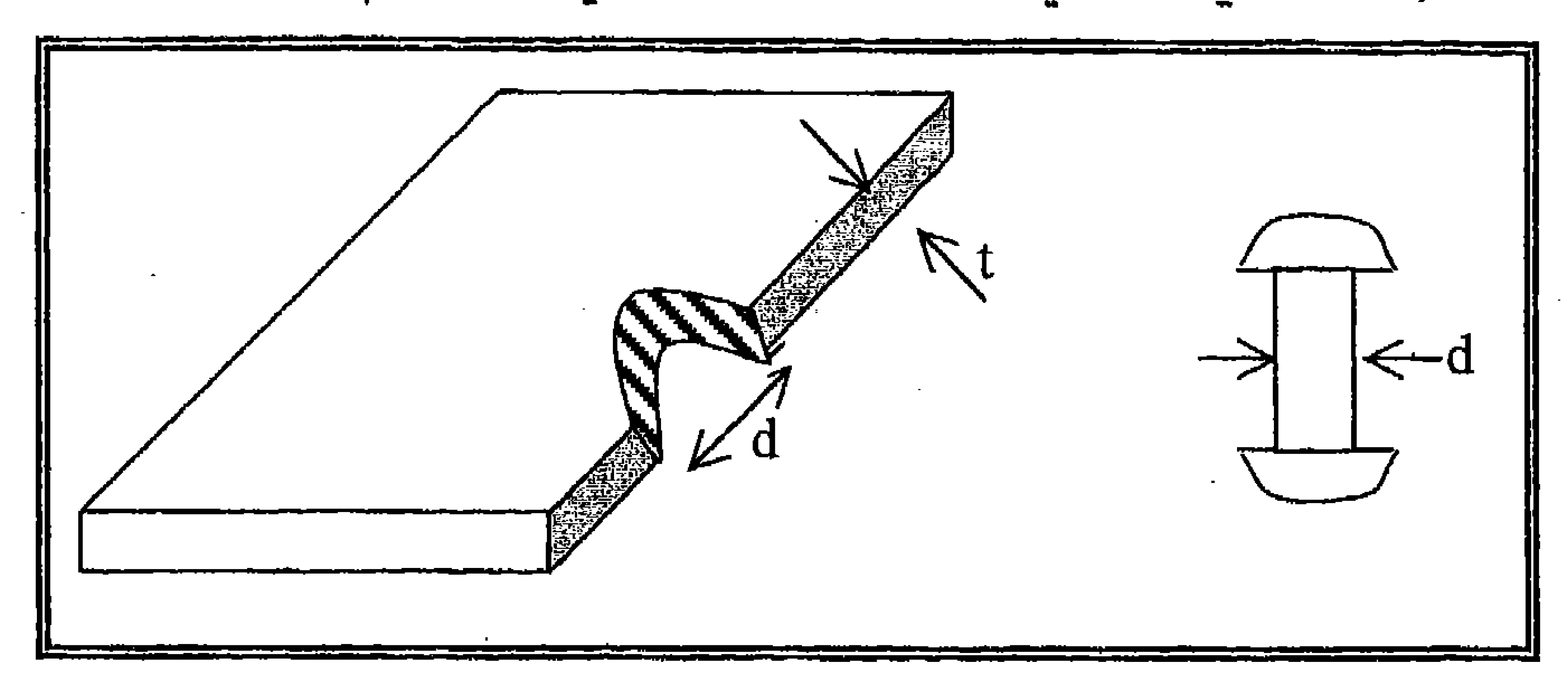
شكل (4-9)



$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{P}{2A} \quad \text{.....(4-6)}$$

ثانياً: إجهاد (مقاومة) التحميل (Bearing Stress):

هو الإجهاد الذي يظهر في المساند الحاملة للبراغي والبراشيم ومسامير التثبيت.



شكل (4-9)

$$\sigma_b = \frac{F}{td} \quad \text{.....(4-7)}$$

حيث أن:

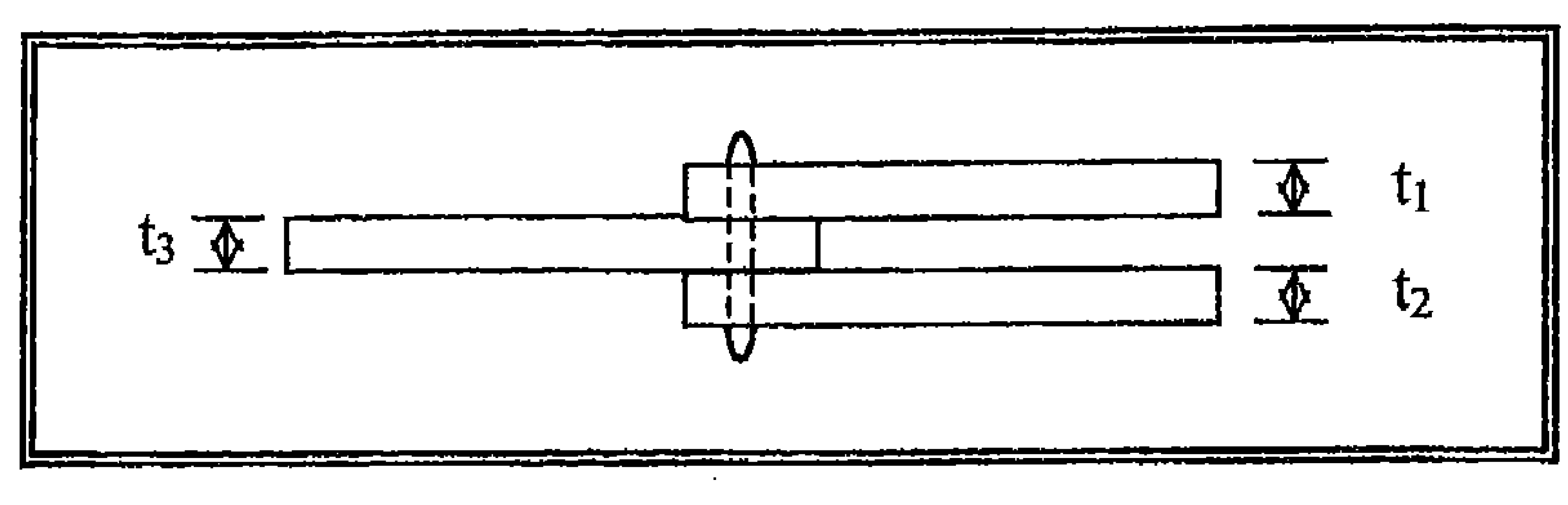
F_b : قوة الارتكاز (التحميل) (N) أو (Kg).

σ_b: إجهاد الارتكاز (التحميل) (N/m^2) أو (Kg / cm^2).

d: قطر المسمار (m) أو (cm).

t: سمك اللوح (m) أو (cm).

إذا كانت الألواح مختلفة السمك فإن أقلها سمكاً هو الذي يؤخذ بعين الاعتبار لحساب إجهاد الارتكاز (التحميل)، وكما هو موضح بالشكل (4-b) إذا كان $[(t_1+t_2)] > (t_3)$ فإننا نأخذ بعين الاعتبار السمك الأقل وهو مجموع سمك اللوحين (1) و (2) أي $(t_1 + t_2)$، أما إذا كان $[(t_3) < (t_1+t_2)]$ فإننا نأخذ سمك اللوح الثالث (t_3) بعين الاعتبار، أي أن الحسابات تبنى دائماً على السمك الأقل.



شكل (4-10)

ثالثاً: مقاومة الشد

وتعرف على أنها مقدار مقاومة اللوح للشد المعرض له، ويحسب إجهاد الشد (σ_t) من العلاقة التالية:

$$\sigma_t = P / A_{net} \quad \text{.......} (4\text{-}8)$$

حيث أن:

(P): هي مقدار القوة المطبقة على اللوح (N) أو (Kg).

(A_{net}): هي المساحة الصافية للوح، وتحسب من حاصل طرح مساحة ثقوب المسامير الموجودة في الصف الأول من مساحة اللوح الكلية أي أن:

$$A_{net} = A_T - (n_R \, d \, t)$$

حيث أن:

A_T : مساحة اللوح الكلية (m^2) أو (cm^2).

n_R: عدد المسامير.

d: قطر المسمار (m) أو (cm).

t: عمق الثقب في اللوح (m) أو (cm).

ويتم أخذ المسامير الموجودة فقط بالصف الأول بعين الاعتبار، لأن الفشل في اللوح أو الانهيار الحادث له في هذه الحالة يكون بتأثير هذا الصف من المسامير.

ويتم التأكد من سلامة التحميل إذا كانت قيمة إجهاد الشد (σ_t) المطبق على اللوح أقل من إجهاد الشد (σ_t) المسموح به للتحميل الآمن.

أمثلة محلولة:

(4 .3) إذا كان قطر المسمار (16mm) وإجهاد القص المسموح به على المسمار ($970Kg/cm^2$)، أحسب قوة القص المفرد للمسمار وقوة القص المزدوج.

الحل:

نقوم بحساب مساحة مقطع المسمار.

$$A = \pi d^2/4 = \left[\pi \times (1.6)^2\right]/4 = 2.011/cm^2$$

نحسب أولاً مقاومة القص المفرد للمسمار.

$$V = \tau A = 970 \times 2.011 = 1950.3 \text{ Kg.}$$

أما في حالة القص المزدوج

$$V_{DS} = 2V = 2 \times 1950.3 = 3900.6 \text{ Kg.}$$

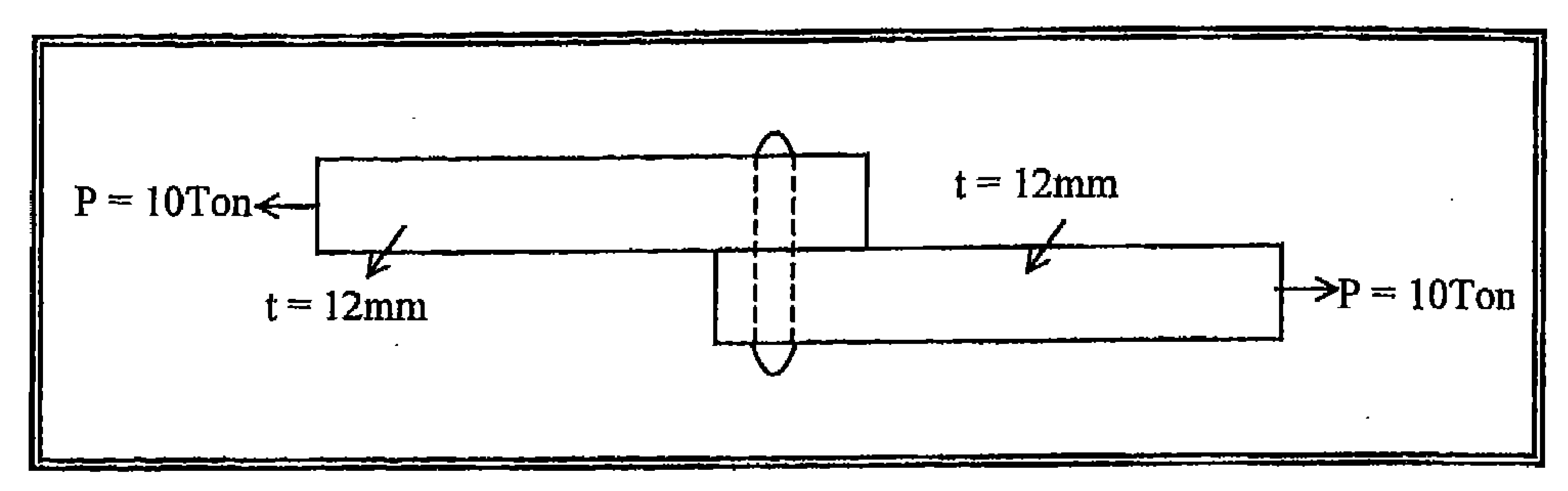
(4.4) إذا كان سمك اللوح (10mm) وقطر المسمار (16mm) وإجهاد الارتكاز ($1980g/cm^2$)، أوجد قوة الارتكاز بين اللوح والمسمار.

الحل:

$$F_b = \sigma_b \, d \, t$$

$$= 1980 \times 1.6 \times 1 = 318 \text{ Kg} = 3.2 \text{ Ton.}$$

(4.5) في الوصلة المبينة في الشكل (4-11) إذا كان قطر المسمار (16mm) وإجهاد القص المسموح به للمسمار هو ($960Kg/cm^2$) وإجهاد التحميل المسموح به هو ($1940Kg/cm^2$)، أوجد عدد المسامير اللازمة لربط هذه الوصلة.



شكل (4-11)

الحل:

من الشكل نجد أن الوصلة مفردة، فتكون قوة القص للمسمار:

$$V = \tau A = \tau \times \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) = 960 \times \pi \left(\frac{(1.6)^2}{4}\right) = 1930.2Kg = 1.93.Ton$$

وتكون مقاومة الارتكاز بين اللوحين والمسمار.

$F_b = \sigma_b A = \sigma_b d t = 1940 \times 1.6 \times 1.2 = 3724.8$ Kg= 3.72Ton.

وعند التصميم نختار القيمة الدنيا وهي للمسمار:

$F_{less} = 1.93$ Ton.

وهذه القيمة لمسمار واحد، ولكن القوة المسلطة على اللوح هي (12Ton) ونحسب عدد المسامير بطريقة الضرب التبادلي:

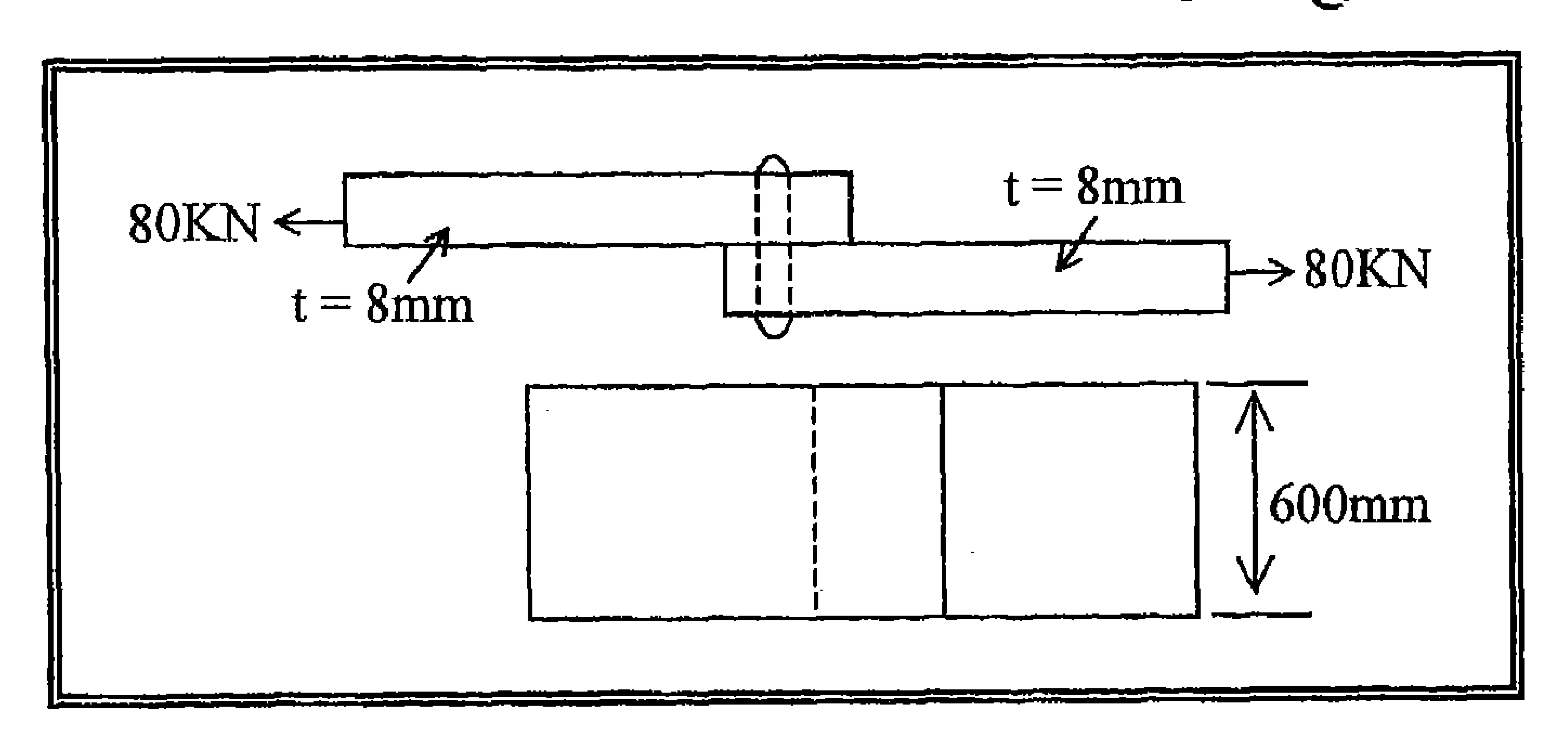
1.93 — 1 Rivets

12 ton — n Rivets

$$n_{Rivets} = \frac{1 \times 12}{1.93} = 6.22$$

فيكون عدد المسامير اللازمة هي (n_R = 7)، حيث يجب وضع القيمة الأكبر للكسر حيث أنه إذا تم وضع (6) مسامير فإن هذه الوصلة سوف تنهار.

(4.6) مفصل تطابق شكل (4-12) سمك لوحاه (8mm) ويؤثر عليه الحمل (P= 80KN)، وإجهاد الارتكاز المسموح به ($340N/mm^2$)، وإجهاد القص المسموح للمسمار ($105N/mm^2$) والوصلة مفردة. أوجد عدد المسامير اللازم استخدامها، إذا علمت أن قطر المسمار (20mm)، وإجهاد الشد المسموح به هو: $160N/mm^2$.



شكل (4-12)

الحل:

بما أن الوصلة مفردة، نقوم بحساب تحمل كل مسمار في قوة القص:

$$V = \tau A = \tau \pi \times \frac{D^2}{4} = 105 \times \pi \times \frac{(20)^2}{4}$$

$$= 32.99KN.$$

نقوم الآن بحساب تحمل كل مسمار في قوة الارتكاز (التحميل):

$$F_b = \sigma_b \, t \, d = 340 \times 8 \times 20 = 54.4KN.$$

إذاً نعتمد على القيمة الأقل عند التصميم وهي قوة القص للمسمار ($F_{less} = 32.99KN$) ومن ثم نحسب عدد المسامير اللازمة:

$$n_R = P / R_{less} = 80/32.99 = 2.4$$

وبالتالي نأخذ (3) مسامير لعملية التثبيت، وحتى تكون الوصلة آمنة يجب التأكد من أن مقاومة الشد للوح بالاعتماد على هذا العدد من المسامير أقل من مقاومة الشد المسموح بها.

(مساحة ثقوب المسامير الثلاثية) - مساحة اللوح الكلية = A_{net}

$$= (b \times t) - (n_R \times d \times t)$$

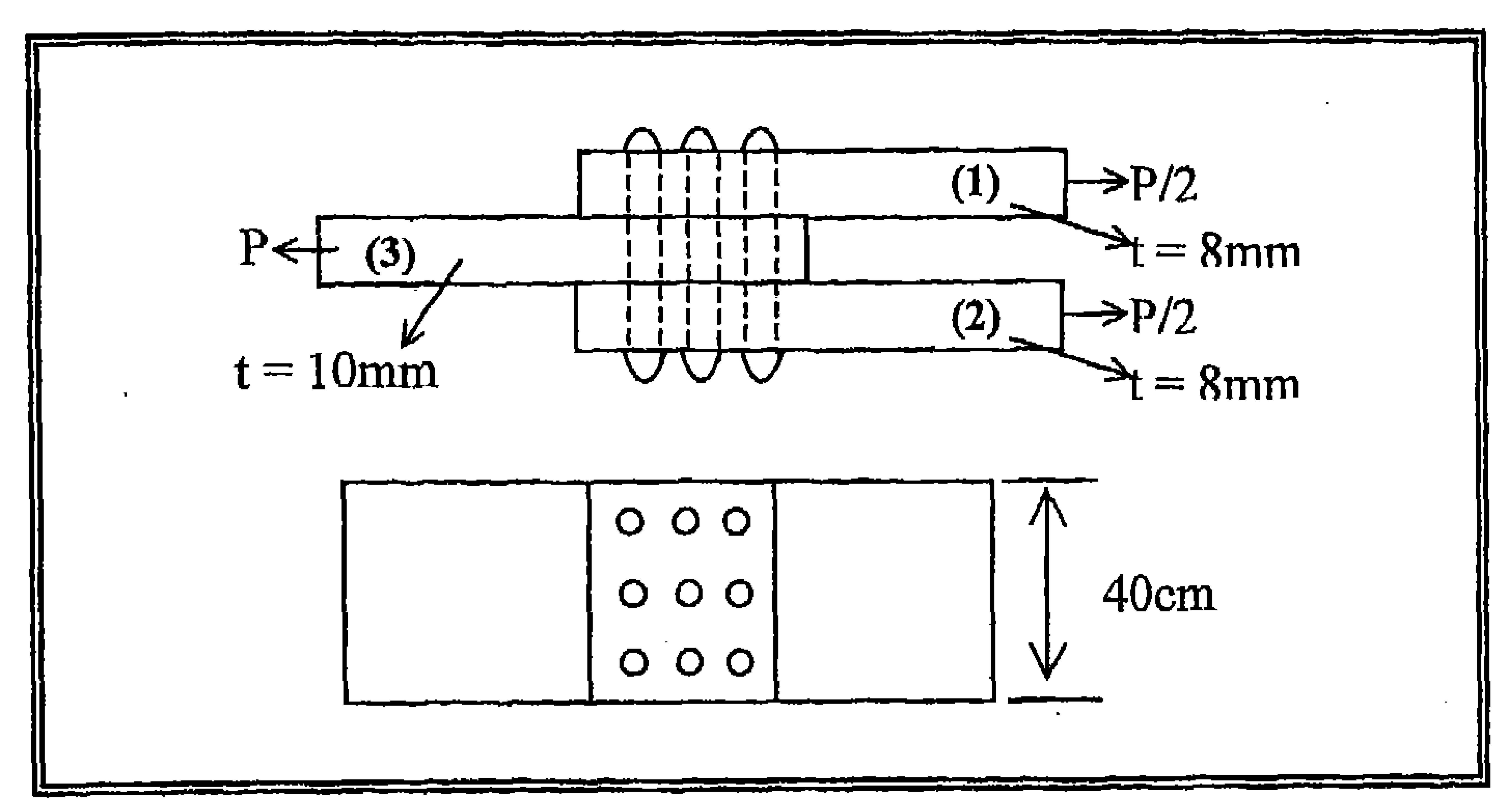
$$= (600 \times 8) - (3 \times 20 \times 8)$$

$$= 4800 - 480 = 4320mm^2$$

$$\sigma_t = P / A_{net} = (80 \times 10^3) / 4320 = 18.52 \; N / mm^2$$

وحيث أن ($18.52 < 160$) أي أنها أقل من قيمة الشد المسموح به فإنه تصميم هذا المفصل سليم من كل الجوانب.

(4.7) أوجد أقصى تحمل للوصلة المبينة في الشكل (13-4) إذا كان عرض الوصلة (40cm) وقطر المسمار (22mm) وكانت مقاومة القص للمسمار ($960kg/cm^2$) ومقاومة الارتكاز للوح ($1940kg/cm^2$) ومقاومة الشد المسموح به للوح ($1200kg/cm^2$)، وعدد المسامير ($n_R = 9Rivets$)، وتأكد من أن هذه الألواح المربوطة تتحمل هذه القوة باستخدام هذا العدد من المسامير.



شكل (4-13)

الحل:

بما أن الوصلة مزدوجة فإن قوة القص المزدوجة هي:

$$V_{DS} = 2\tau A = 2\,\tau\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)$$

$$= 2 \times 960 \times \pi \times \frac{(2.2)^2}{4} = 7.3 \text{ Ton.}$$

وتكون القوة المسلطة بالاعتماد على هذه القيمة هي:

$$P = n_R\, V_{DS} = 9 \times 7.3 = 65.7 \text{ Ton.}$$

نقوم الآن بحساب قوة الارتكاز (التحميل)، ويتم احتساب المساحة الأقل:

$$A_1 = D\,(t_1 + t_2) = 2.2\,(0.8 + 0.8) = 3.52 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = D\,(t_3) = 2.2 \times 1 = 2.2 \text{ cm}^2$$

إذاً نقوم باستخدام المساحة الأقل وهي ($2.2cm^2$):

$$F_b = \sigma_b\, A_2 = 1940 \times 2.2 = 4.3 \text{ Ton.}$$

وتكون القوة المسلطة بالاعتماد على هذه القيمة هي:

$$P = n_R\, F_b = 9 \times 4.3 = 38.4 \text{ Ton.}$$

نقوم الآن بحساب مقدار القوة المسلطة بالاعتماد على مقاومة الشد:

$$A_{net} = (bt) - (n_R\ Dt) = (40 \times 1) - (3 \times 2.2 \times 1) = 33.4\ cm^2.$$

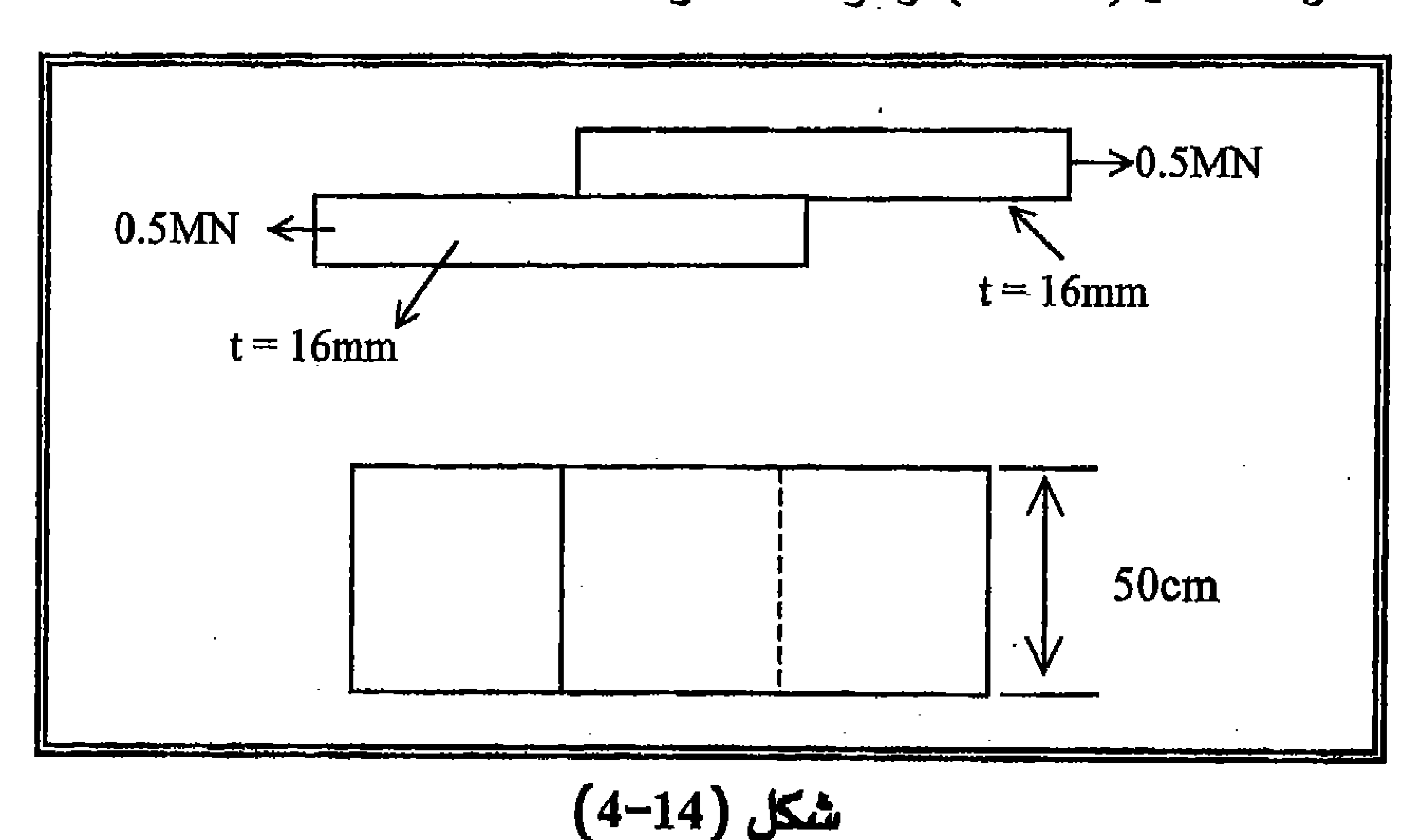
نلاحظ هنا أننا أخذنا بعين الاعتبار الصف الأول من المسامير وهي ثلاث مسامير فقط، حيث أن الحمل في هذه المقاومة يطبق على الصف الأول فقط.

ونقوم الآن بحساب القوة المسلطة:

$$P = \sigma_t\ A_{net} = 1200 \times\ 33.4 = 40.1\ Ton.$$

ويتم اعتماد القوة الأقل من القوة الثلاثة لتكون أقصى حمل يمكن تطبيقه وهي (38.4 Ton).

(4.8) أوجد عدد المسامير اللازم وضعها لتثبيت لوحي التطابق شكل (4-14) والذي يبلغ سمك كل لوح منهما (16mm)، إذا كانت القوة المسلطة (0.5MN)، وإجهاد الارتكاز المسموح به (160MPa) وإجهاد القص المسموح به للمسمار (90MPa) وإجهاد الشد للوح (320MPa) حيث أن قطر المسمار (22mm) والوصلة مفردة.



شكل (4-14)

الحل:

بما أن الوصلة مفردة تكون مقاومة القص للمسمار.

$$V = \tau A = \tau \pi \frac{D^2}{4} = 90 \times 10^5 \times \pi \times \frac{\left(22 \times 10^{-3}\right)^2}{4} = 34.2KN$$

ونحسب مقاومة الارتكاز:

$$F_b = \sigma_b \, t D = 160 \times 10^6 \times (16 \times 10^{-3}) \times (22 \times 10^{-3}) = 56.3KN$$

وبالتالي نعتمد على المقاومة الأقل وهي (34.2KN) ونحسب عدد المسامير اللازمة:

$$n_R = P / F_{less} = \left(0.5 \times 10^6\right) / \left(34.2 \times 10^3\right) = 14.62$$

أي نأخذ (15) مسماراً.

ولإجراء التأكد من مقاومة اللوح للشد نحسب المساحة الصافية للوح المعرضة للشد باعتبار أن هذه المسامير موزعة على ثلاث صفوف وكل صف يحتوي على (5) مسامير:

$$\begin{aligned} A_{net} &= (bt) - (n_R D t) = \left[\left(50 \times 10^{-2}\right)\left(16 \times 10^{-3}\right)\right] - \left[5\left(22 \times 10^{-3}\right)\left(16 \times 10^{-3}\right)\right] \\ &= \left(8 \times 10^{-3}\right) - \left(1.67 \times 10^{-3}\right) \\ &= 6.24 \times 10^{-3} m^2 \end{aligned}$$

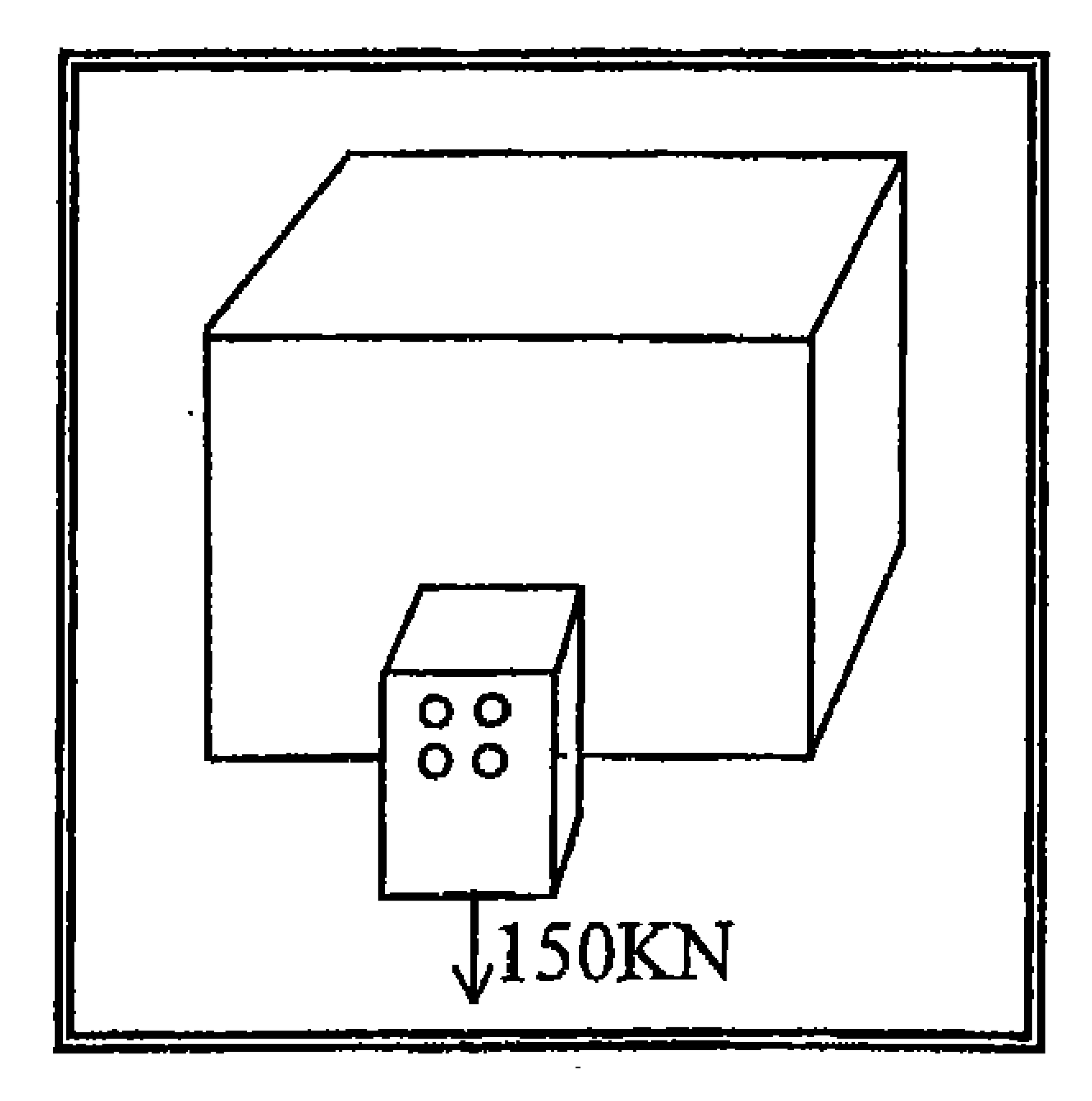
$$\sigma_t = P / A_{net} = \left(0.5 \times 10^6\right) / \left(6.24 \times 10^{-3}\right) = 80.13MPa$$

وحيث أن مقاومة الشد هذه أقل من مقاومة الشد القصوى أي أن $(80.13MPa < 320MPa)$ لذا فإن التحميل آمن.

مسائل إضافية:

(4.9) أوجد إجهاد القص المتولد في كل برغي إذا علمت أن قطر البرغي هو 15mm.

$$\tau = \frac{F}{4A} = \frac{150 \times 10^3}{4\pi\,(0.0075)^2}$$
$$= 212.2\text{MPa}$$

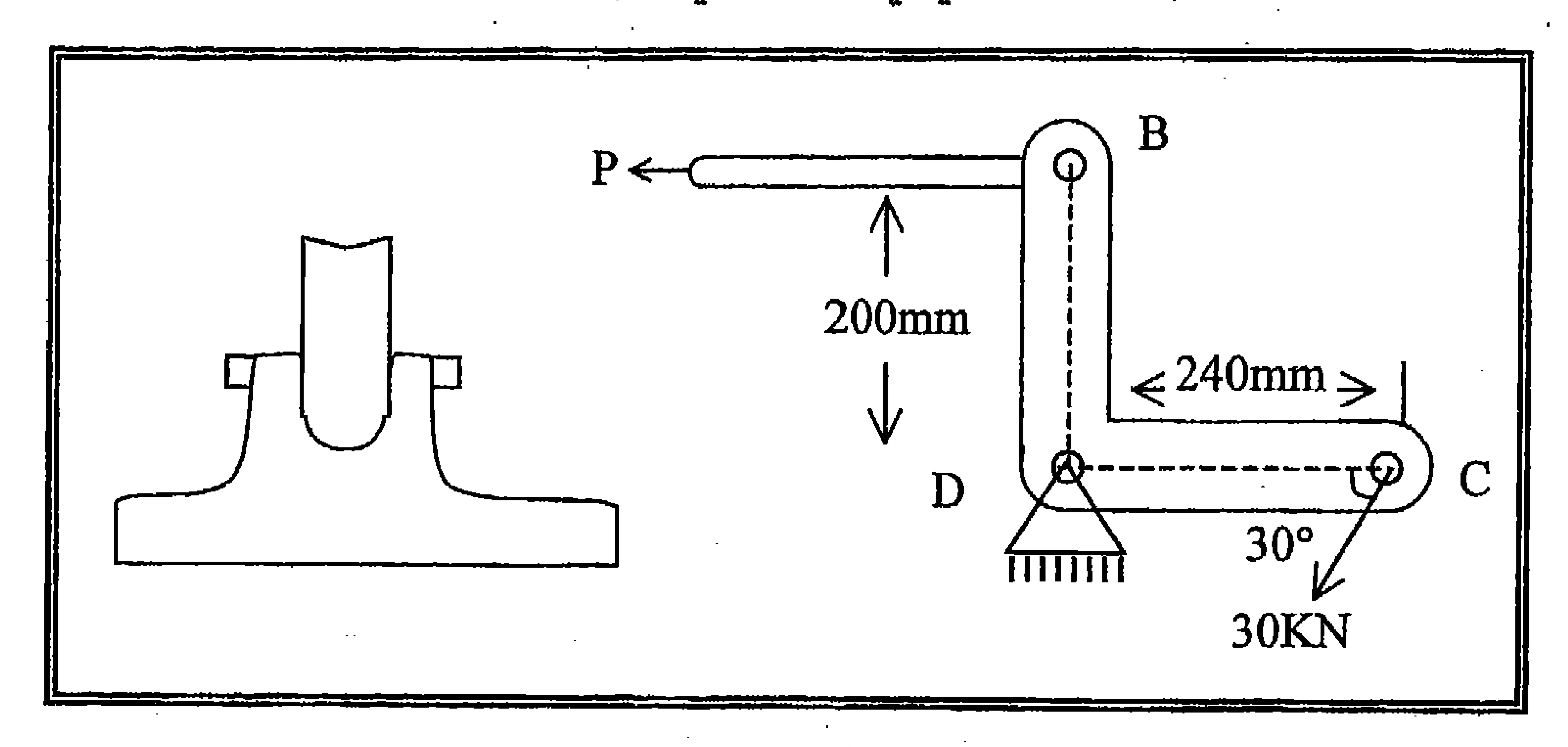


شكل (4-15)

(4.10) في الشكل التالي احسب ما يلي:

a) القطر اللازم لذراع التوصيل AB إذا كان إجهاده المحوري الأقصى 100MPa.

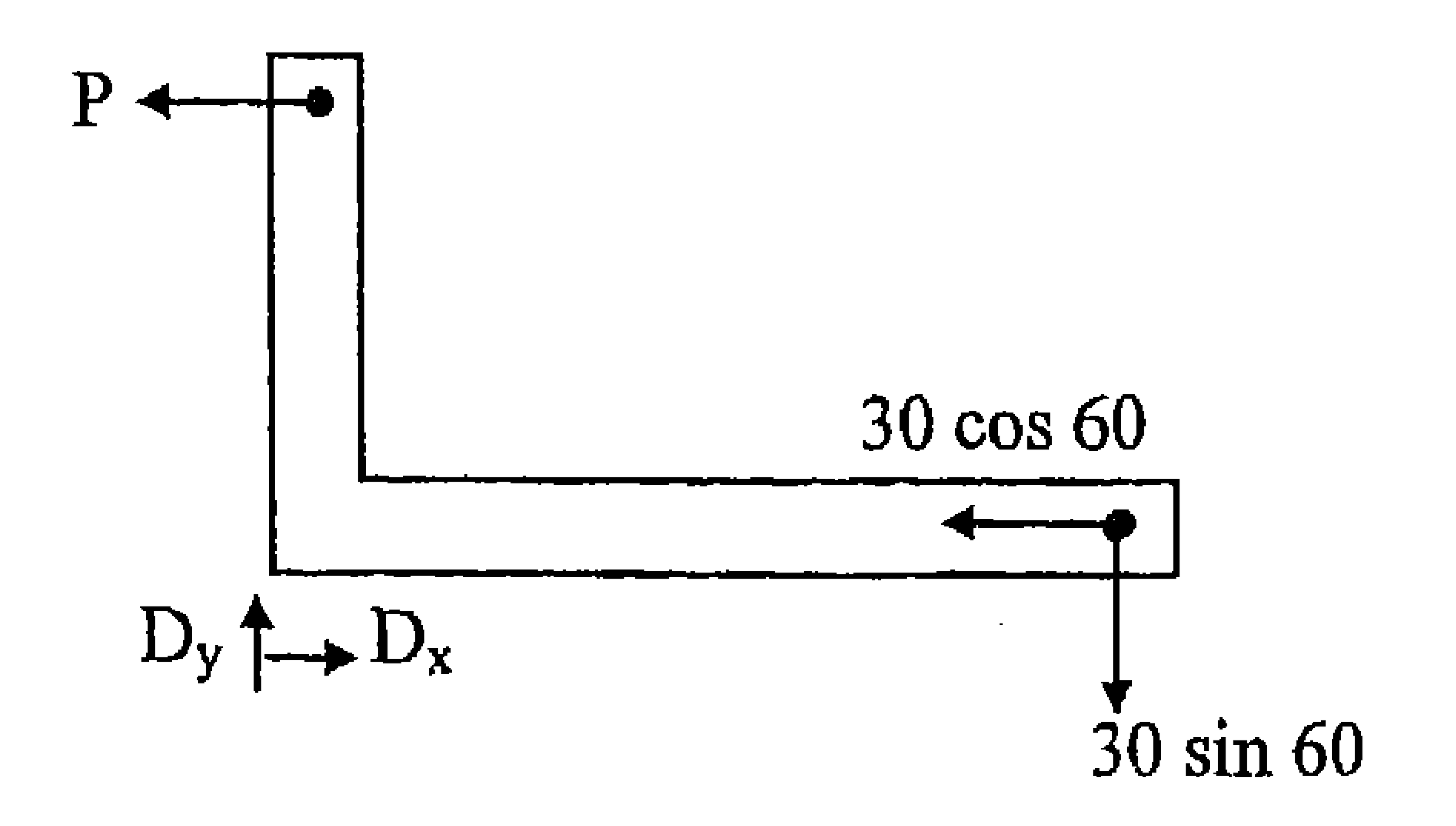
b) احسب الإجهاد القصي في المسمار في D إذا كان قطره 20mm.



شكل (4-16)

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر:



$$\curvearrowright + \sum M_D = 0 = -30\sin 60 \times 0.24 + 0.2P =$$

$$P = 31.2 \text{ KN}$$

$$\sigma AB = F/A = \frac{31.2 \times 10^3}{\pi (r)^2} = 100 \times 10^6$$

$$r = 9.96\text{mm} \Rightarrow d = 19.93\text{mm}$$

$$\sum F_x = 0 = D_X - 30\cos 60 - 31.2 = 0$$

$$D_X = 46.2\text{KN}$$

$$\sum F_y = 0 = D_y - 30\sin 60 = 0$$

$$D_y = 26\text{KN}$$

$$F_D = \sqrt{D_X^2 + D_y^2}$$

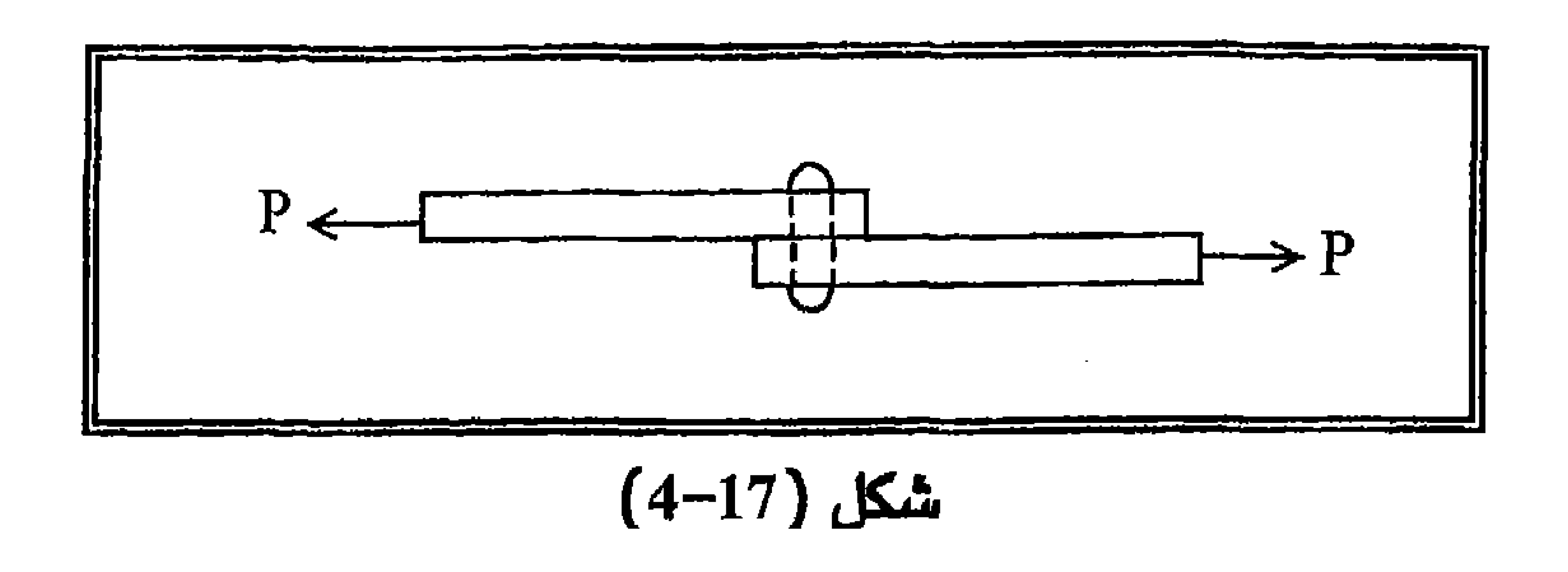
$$F_D = \sqrt{(46.2)^2 + (26)^2} = 53\text{KN}$$

$$\tau_D = \frac{F_D}{A} = \frac{53 \times 10^3}{\pi (0.01)^2}$$

$$= 168.7 \text{ MPa}$$

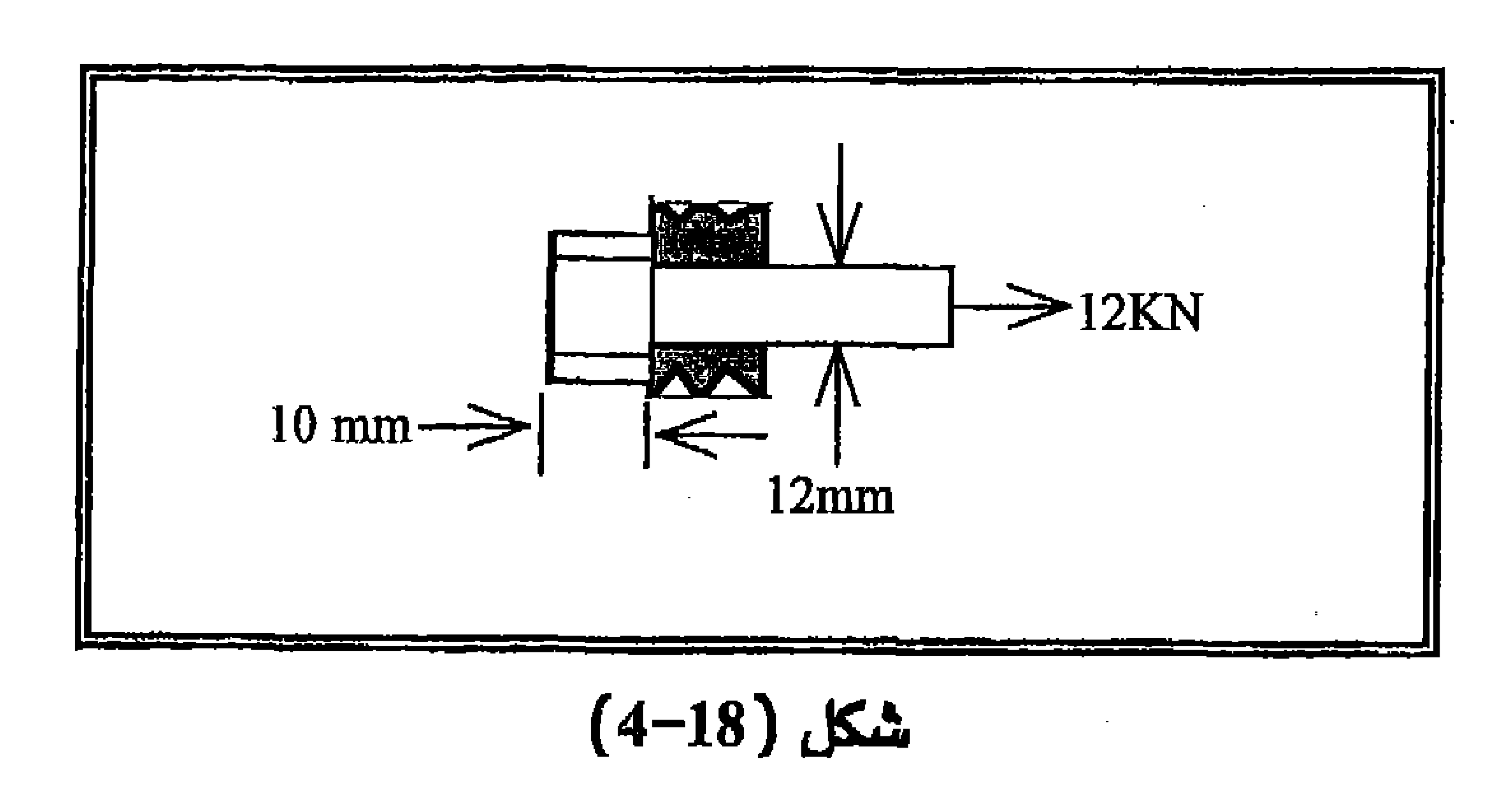
مسائل إضافية:

(4.1) استعمل مسمار برشام واحد لوصل لحين كما هو موضح في الشكل (4-17)، لو أن قطر المسمار يساوي (25mm) والحمل (P) يساوي (40KN)، أحسب إجهاد القص الناشئ في المسمار.



شكل (4-17)

(4.2) مسمار من الصلب قطره (12mm) ومعرض لحمل شد محوري مقداره (12KN) كما هو موضح بالشكل (4-18). احسب إجهاد القص في رأس المسمار بافتراض أن القص يحدث على سطح أسطواني له نفس قطر المسمار.



شكل (4-18)

(4.3) استعمل مثقاب دائري قطره (25mm) في ثقب فجوة خلال لوح من الصلب سمكه (12mm)، لو أن القوة اللازمة لقطع المثقاب خلال المعدن تساوي (260KN)، احسب إجهاد القص الذي ينشأ في هذا اللوح.

الوحدة الخامسة

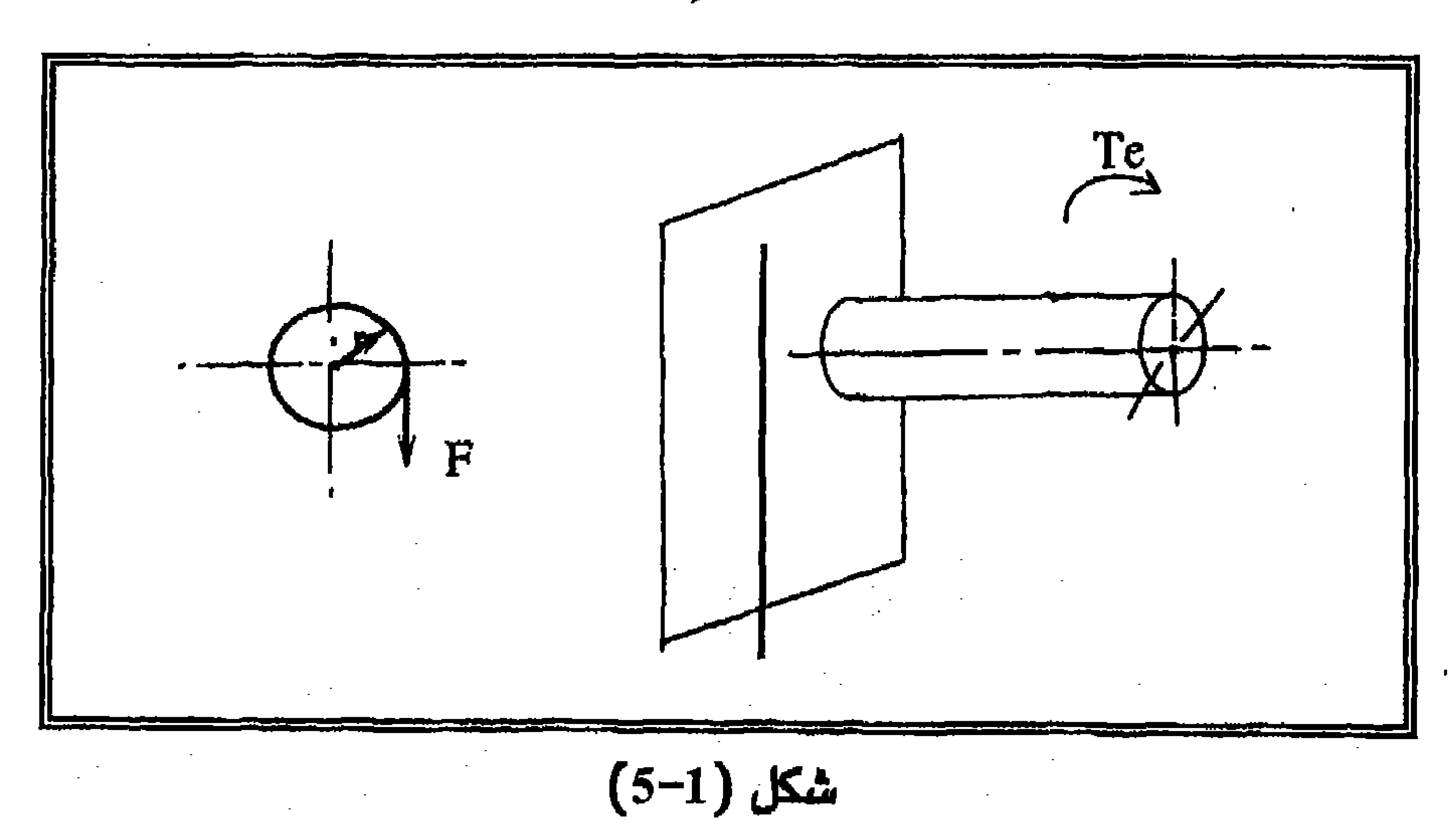
الالتواء

الوحدة الخامسة

الالتواء

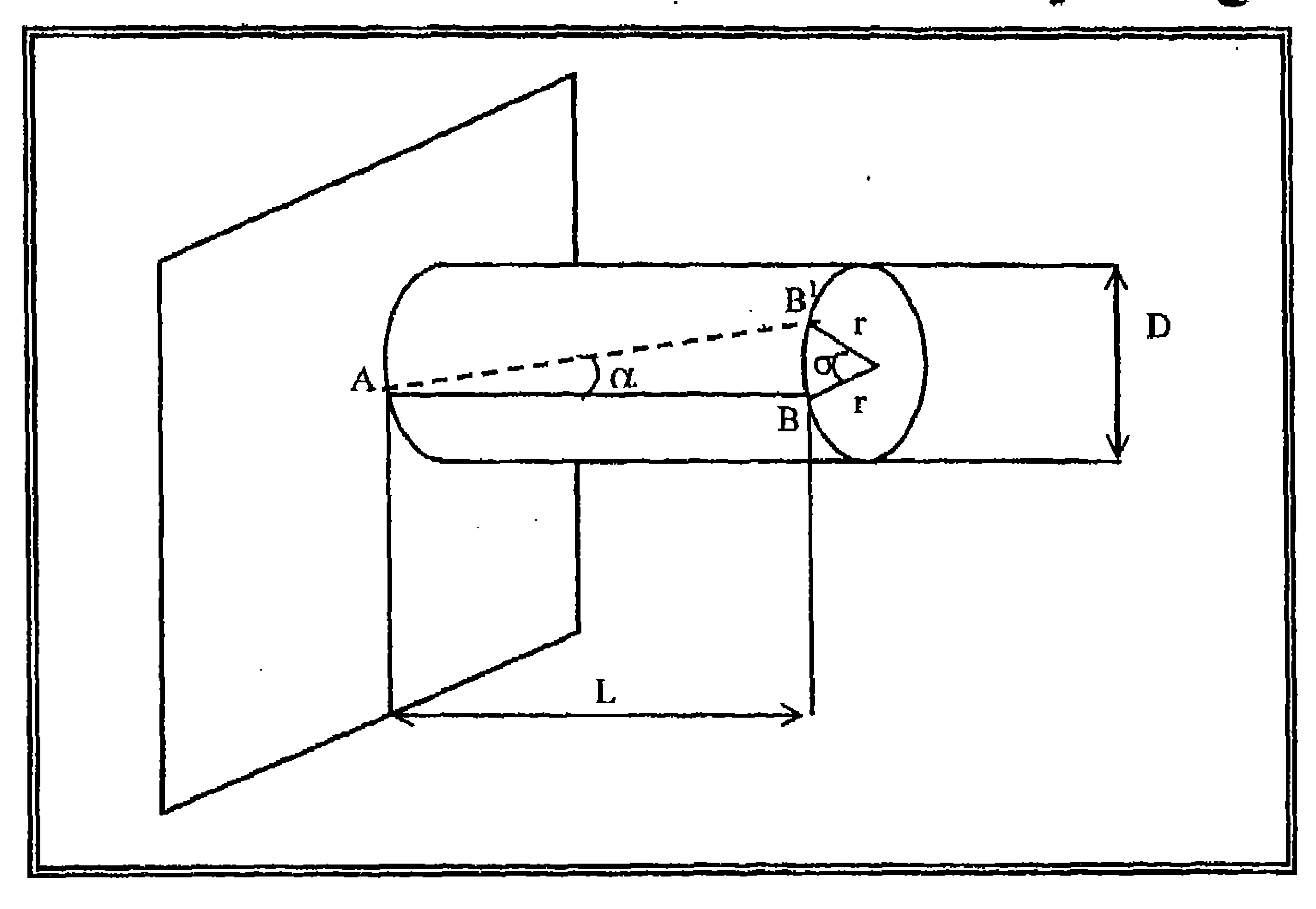
إن القضيب أو العمود يتعرض إلى الالتواء نتيجة الحمل الاستاتيكي، إذا ما ظهرت في مقاطعة العرضية عزوم الالتواء، أي العزوم التي تكون في مستوى القطع، وتظهر عزوم الالتواء الداخلية (Ti) هذه، عادة تحت تأثير العزوم الخارجية (Te) شكل (1-5). وكقاعدة فإن العزوم الخارجية تنتقل للعمود في مواضع ربطه بالبكرات أو العجلات المسننة أو ما شابه ذلك.

وبالإضافة إلى عزوم الالتواء تظهر في المقاطع العرضية للقضيب قوى داخلية أخرى وهي قوى القص وعزم الانحناء. إن القضبان التي تدور وتعمل تحت تأثير الالتواء تسمى بأعمدة الإدارة، ويعتبر عزم الالتواء موجبا عندما يحاول العزم الخارجي إدارة العمود عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وهذه القاعدة يجب استعمالها من أول العمود إلى آخره.



شكل (1-5)

(5-1) تحديد إجهادات الالتواء وانفعالات الالتواء في القضبان ذات المقطع الدائري الأجوف والمصمت:



شكل (5-2)

إن عزم الالتواء هو الذي يمثل محصلة القوى الداخلية فقط، وبالحقيقة، ففي المقطع العرضي للقضيب الملوي، تؤثر قوى مماسية (قص) داخلية موزعة باستمرار ، ونأتي الآن على كيفية تحديدها.

نبحث الآن تشوهات القضيب شكل (5-2)، إن زاوية القص لجزء من القضيب الذي يقع على سطح القضيب تساوي:

$$\gamma = \frac{BB'}{L}$$

ورياضياً فإن طول القوس (BB') يساوي حاصل ضرب نصف قطر القضيب (r) في زاوية الالتواء للقضيب (θ)، لذا فإن انفعال القص الالتوائي يعطى بالعلاقة:

$$\gamma = r\theta / L \qquad (5\text{-}1)$$

واستناداً إلى قانون هوك فعند القص نحصل على:

$$\tau = G\gamma \quad \text{.......... (5-2)}$$

حيث أن: τ : إجهاد القص الالتوائي (N/m^2)

G: معامل الجساءة (N/m^2).

5-2) الالتواء في الأعمدة الدوارة:

وكما نرى، فعند الالتواء تتناسب تشوهات القص مع الإجهادات المماسية تناسباً طردياً. إن إجهادات القص في مركز ثقل المقطع العرضي تساوي صفراً، وتوجد إجهادات القص العظمى في نقاط المقطع الواقعة قرب سطح القضيب، وبمعرفة قانون توزيع إجهادات القص، من السهل تحديد مقدارها، ويعطى إجهاد القص الالتوائي من العلاقة:

$$\tau = Tr/J \quad \text{.......... (5-3)}$$

حيث أن:

T: عزم اللي (N.m) يعطى بالعلاقة $(T = FD)$.

r : نصف قطر القضيب (m).

J: عزم القصور الذاتي القطبي للمقطع (m^4).

وبشكل عام فإن قيمة (J) تحسب من العلاقة:

$$J = \int r^2 dA \quad \text{.......... (5-4-a)}$$

ولمساحة مقطع مستطيلة:

$$J = \frac{bh}{12}\left(b^2 + h^2\right) \quad \text{.......... (5-4-b)}$$

ولمساحة مقطع قضيب دائري مصمت:

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{1}{2}\pi r^4 \quad \text{.......... (5-4-c)}$$

ولمساحة مقطع قضيب دائري مفرغ:

$$J = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) \quad \text{.........(5-4-d)}$$

حيث أن: (r_1) و (r_2) نصف قطر القضيب الداخلي والخارجي على الترتيب، ولمساحة مقطع قضيب رقيق الجدار بنصف قطر (r) وسمك (t):

$$\tau = 2\,\pi\, r^3 t$$

5-3) زاوية اللي في الأعمدة في حد المرونة:

يمكن حساب زاوية اللي (θ) بالصورة التالية:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{Tr/J}{r\theta/L} = \frac{TL}{J\theta}$$

$$\theta = TL / JG \quad \text{.........(5-5)}$$

ويمكن تحديد إجهادات وانفعالات القص الالتوائي الأعظمين (τ_{max}) و(γ_{max}) وكذلك إجهاد وانفعال القص الالتوائي الأدنيين (τ_{min}) و (γ_{min}) في قضيب مفرغ بالصيغ الرياضية التالية:

$$\tau_{max} = \frac{Tr_2}{J} \quad \text{.........(5-6-a)}$$

$$\gamma_{min} = \frac{r_2\theta}{L} \quad \text{.........(5-6-b)}$$

$$\tau_{min} = \frac{Tr_1}{J} \quad \text{.........(5-7-a)}$$

$$\gamma_{min} = \frac{r_1\theta}{L} \quad \text{.........(5-7-b)}$$

وبقسمة كل من المعادلة (5-6-a) على المعادلة (5-7-a) وكذلك المعادلة (5-6-b) على المعادلة (5-7-b) نحصل على:

$$\frac{\tau_{max}}{\tau_{min}} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{.........(5-8-a)}$$

$$\frac{\gamma_{max}}{\gamma_{min}} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{..(5-8-b)}$$

أمثلة محلولة:

(5.1) أوجد انفعال القص الالتوائي في قطعة دائرية على مسافة تبعد عن المركز (3cm) حيث كان انفعال القص الالتوائي الأعظم (0.03) وقطر العينة (9cm).

الحل:

بما أن:

$$\frac{\gamma_{min}}{\gamma_{max}} = \frac{r_1}{r_2}$$

إذاً فإن الانفعال على بعد (3cm) يكون هو الانفعال الأدنى:

$$\gamma_{min} = \left(\gamma_{max} \times r_1\right) / r_2 = \frac{0.03 \times 3}{4.5} = 0.02\text{Rad}$$

(5.2) أحسب أبعاد مقطع عمود جديد يراد استبداله بعمود دوران مساحة مقطعه دائري مصمت، قطره (250mm) بحيث يكون القضيب الجديد أجوف قطره الخارجي ضعف الداخلي ويبقى أقصى إجهاد قص التوائي في العمودين ثابت وكذلك طول كل من العمودين. وما هي نسبة التوفير في الوزن عن هذا التبديل إذا كانا مصنوعين من نفس المعدن؟

الحل:

لنفرض أن القطر الخارجي للقضيب الأجوف (2d) لذلك يكون القطر الداخلي له (d) فيكون عزم القصور الذاتي القطبي للقضيب الأجوف:

$$J = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{2d}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[d^4 - \left(\frac{d^4}{16}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{15}{16}d^4\right] = 1.47d^4$$

ويكون عزم القصور الذاتي القطبي للقضيب المصمت:

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \times (0.25)^4}{32} = 3.835 \times 10^{-4}\,m^4$$

وبما أن إجهاد القص الالتوائي الأعظم (τ_{max}) ثابت للقضيبين وكذلك عزم الالتواء، إذاً يمكن مساواة معادلتي (τ_{max}) لكل من القضيب المصمت والأجوف ببعضهما.

τ_{max}(للأجوف) = τ_{max} (للمصمت).

للأجوف $\left(\frac{Tr_2}{J}\right)$ = للمصمت $\left(\frac{Tr}{J}\right)$

(حيث أن $r_2 = \frac{2d}{2} = d$).

$$\frac{0.125}{3.835 \times 10^{-4}} = \frac{d}{1.47d^4}$$

$$\frac{0.125}{3.835 \times 10^{-4}} = \frac{d}{1.47d^3}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{3.835 \times 10^{-4}}{1.47 \times 0.125}} = 0.1278m = 127.8mm$$

إذاً يكون القطر الداخلي $d_1 = d = 127.8mm$

أما القطر الخارجي فيكون:

$$d_2 = 2d = 2 \times 127.8 = 225.6mm$$

ومن أجل حساب نسبة التوفير في الوزن، فإن الوزن يكون $W = mg$.

ولكن:

$$\rho = m/V$$

$$m = \rho V$$

ولكن الحجم هو حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع: $V = AL$

فيكون الوزن مساوياً لـ:

$$W = \rho ALg = \frac{\pi D^2}{4}(\rho Lg)$$

ونسبة التوفير بالوزن تحسب من العلاقة:

$$\text{نسبة التوفير} = \frac{W_1 - W_2}{W_1} \times 100\%$$

وبالتالي:

$$\text{نسبة التوفير} = \frac{\left[\frac{\pi D^2}{4}(\rho Lg)\right]_{\text{مصمت}} - \left[\frac{\pi D^2}{4}(\rho Lg)\right]_{\text{أجوف}}}{\left[\frac{\pi D^2}{4}(\rho Lg)\right]_{\text{مصمت}}} \times 100\%$$

$$\text{نسبة التوفير} = \frac{\left[\frac{\pi D^2}{4}(\rho Lg)\right]_{\text{مصمت}} - \left[\frac{\pi D_2^2 \times \rho Lg}{4} - \left(\frac{\pi D_1^2 \times \rho Lg}{4}\right)\right]_{\text{أجوف}}}{\left[\frac{\pi D^2}{4}(\rho Lg)\right]_{\text{مصمت}}} \times 100\%$$

ولكن القضيبين من نفس المادة والطول متساوي لكل من القضيبين، فتكون نسبة التوفير:

$$\text{نسبة التوفير} = \frac{D^2_{\text{مصمت}} - \left(D_2^2 - D_1^2\right)_{\text{أجوف}}}{D^2_{\text{مصمت}}} \times 100\%$$

$$= \frac{(250)^2 - \left[(225.6)^2 - (127.8)^2\right]}{(250)^2} \times 100\% = 21.6\%$$

(5.3) اسطوانة مجوفة طولها (2m) ولها قطر داخلي مقداره (50mm) وقطرها الخارجي مقداره (100mm)، أوجد عزم الدوران الأقصى الذي يمكن أن يسلط على هذه الاسطوانة إذا كان إجهاد القص الالتوائي الأعظم (120MPa)، وأوجد كذلك إجهاد القص الالتوائي الأدنى.

الحل:

نقوم أولاً بحساب عزم القصور الذاتي القطبي:

$$J = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left[\left(50 \times 10^{-3}\right)^4 - \left(25 \times 10^{-3}\right)^4\right] = 4.6 \times 10^{-6}\, m^4.$$

وبما أن العزم الأقصى يحسب على أساس إجهاد القص الالتوائي الأعظم وكذلك القطر الخارجي للقضيب الأجوف فإن:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \times r_2}{J} \longrightarrow T_{max} = \frac{\tau_{max} \times J}{R_2}$$

$$\tau_{max} = \frac{120 \times 10^6 \times 4.6 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-3}} = 11.05 K\ N.m$$

ويكون إجهاد القص الالتوائي الأدنى:

$$\frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{r_1}{r_2} \longrightarrow \tau_{min} = \frac{\tau_{max} r_1}{r_2}$$

$$\tau_{min} = \frac{120 \times 25}{50} = 60\, MPa$$

(5.4) عمود دوران أجوف قطره الخارجي 0.5m والداخلي (0.25m) يتعرض لعزم دوران مقداره (500KN. m) ومعامل المرونة القصي له (70GPa) وطوله (8m) أوجد إجهاد القص الالتوائي الأعظم وزاوية اللي لهذا القضيب. وإذا أردنا استبدال هذا القضيب الأجوف بآخر مصمت له نفس الطول ونفس زاوية اللي ونفس عزم اللي ومن نفس المادة، فكم يكون قطر مقطعه؟.

الحل:

نقوم أولاً بحساب عزم القصور الذاتي القطبي:

$$J = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left[(0.25)^4 - (0.125)^4\right] = 5.75 \times 10^{-3} m^4$$

ويكون إجهاد القص الالتوائي الأعظم:

$$\tau_{max} = \frac{Tr_2}{J} = \frac{500 \times 10^3 \times 0.25}{5.75 \times 10^{-3}} = 21.73 MPa$$

وتكون زاوية اللي:

$$\theta = TL/GJ = \frac{500 \times 10^3 \times 8}{70 \times 10^9 \times 5.75 \times 10^{-3}} = 9.94 \times 10^{-3} Rad$$

ولحساب قيمة قطر القضيب المصمت نساوي زاوية اللي للقضيب الأجوف بزاوية اللي للقضيب المصمت.

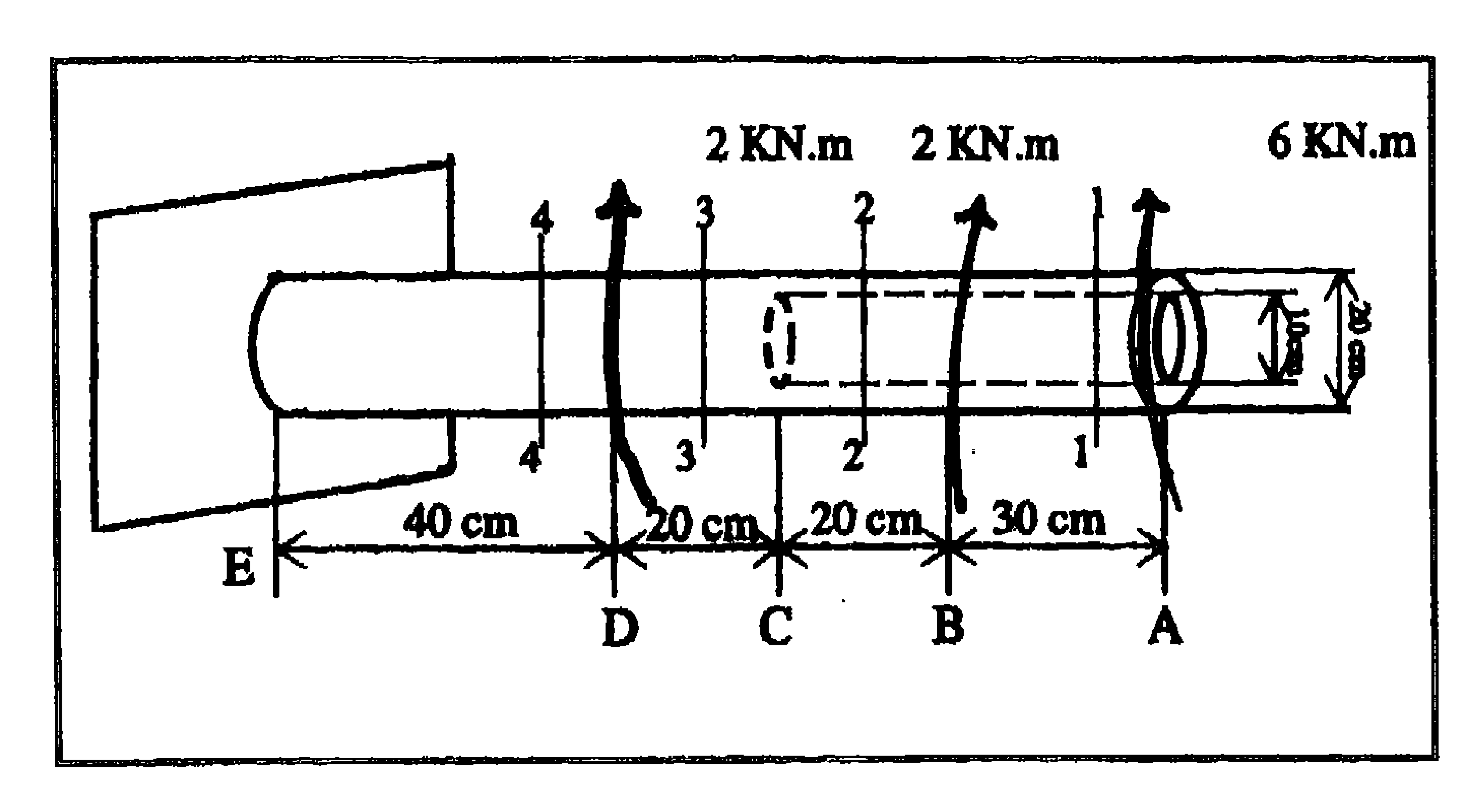
$\left(\frac{TL}{GJ}\right)$ مصمت $=$ $\frac{TL}{GJ}$ أجوف $\rightarrow$ θ مصمت $=$ θ أجوف.

وحيث أن القضيبين من نفس المعدن ومتساويين لكل من (T) و (L) و (G) لذا:

J مصمت $=$ J أجوف

$$5.75 \times 10^{-3} = \frac{\pi D^4}{32} \longrightarrow D = \sqrt[4]{\frac{5.75 \times 10^{-3} \times 32}{\pi}} = 0.49$$

(5.5) احسب أعظم إجهاد قص التوائي، وكذلك زاوية اللي عند الطرف الحر للعمود المبين في الشكل (3-5) إذا علمت أن معامل المرونة القصي للعمود (75GPa).



شكل (3-5)

الحل:

نقوم أولاً بحاسب عزم القصور الذاتي القطبي في كل من الجزء (AC) والجزء (CE).

$$J_{AC} = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^2\right) = \frac{\pi}{2}\left[(0.10)^4 - (0.05)^4\right] = 1.47 \times 10^{-4}\,m^4$$

$$J_{EC} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi \times (0.2)^4}{32} = 1.57 \times 10^{-4}\,m^4$$

نقوم الآن بحساب قيم عزم اللي في المناطق الأربعة الموضحة في الشكل (3-5):

$$T_{AB} = 6KN$$

$$T_{BC} = 6 + 2 = 8KN$$

$$T_{CD} = 8KN$$

$$T_{ED} = 2+8 = 10KN$$

وبعد تحديد قيمة عزم اللي في كل منطقة نقوم الآن بحساب أعظم إجهاد قص التوائي محتمل في كل من المناطق الأربعة:

$$\tau_{max(AB)} = \left(\frac{Tr_2}{J}\right)_{AB} = \frac{\left(6\times10^3\right)\times 0.1}{1.47\times10^{-4}} = 4.1\,MPa$$

$$\tau_{max(BC)} = \left(\frac{Tr_2}{J}\right)_{BC} = \frac{\left(8\times10^3\right)\times 0.1}{1.47\times10^{-4}} = 5.4\,MPa$$

$$\tau_{max(CD)} = \left(\frac{Tr}{J}\right)_{CD} = \frac{\left(8\times10^3\right)\times 0.1}{1.57\times10^{-4}} = 5.1\,MPa$$

$$\tau_{max(DE)} = \left(\frac{Tr}{J}\right)_{DE} = \frac{\left(10\times10^3\right)\times 0.1}{1.57\times10^{-4}} = 6.4\,MPa$$

وبالتالي يكون أعظم إجهاد قص التوائي في الجزء (DE) وقيمته (6.4MPa)، نقوم الآن بحساب زاوية اللي لكل مقطع على حدة:

$$\theta_{AB} = \left(\frac{TL}{GJ}\right)_{AB} = \frac{\left(6\times10^3\right)\times 0.3}{\left(70\times10^9\right)\left(1.47\times10^{-4}\right)} = 175\times10^{-6}\,Rad$$

$$\theta_{BC} = \left(\frac{TL}{GJ}\right)_{BC} = \frac{\left(8\times10^3\right)\times 0.2}{\left(75\times10^9\right)\left(1.47\times10^{-4}\right)} = 145\times10^{-6}\,Rad$$

$$\theta_{CD} = \left(\frac{TL}{GJ}\right)_{CD} = \frac{\left(8\times10^3\right)\times 0.2}{\left(75\times10^9\right)\left(1.57\times10^{-4}\right)} = 136\times10^{-6}\,Rad$$

$$\theta_{DE} = \left(\frac{TL}{GJ}\right)_{DE} = \frac{\left(10\times10^3\right)\times 0.4}{\left(75\times10^9\right)\left(1.57\times10^{-4}\right)} = 340\times10^{-6}\,Rad$$

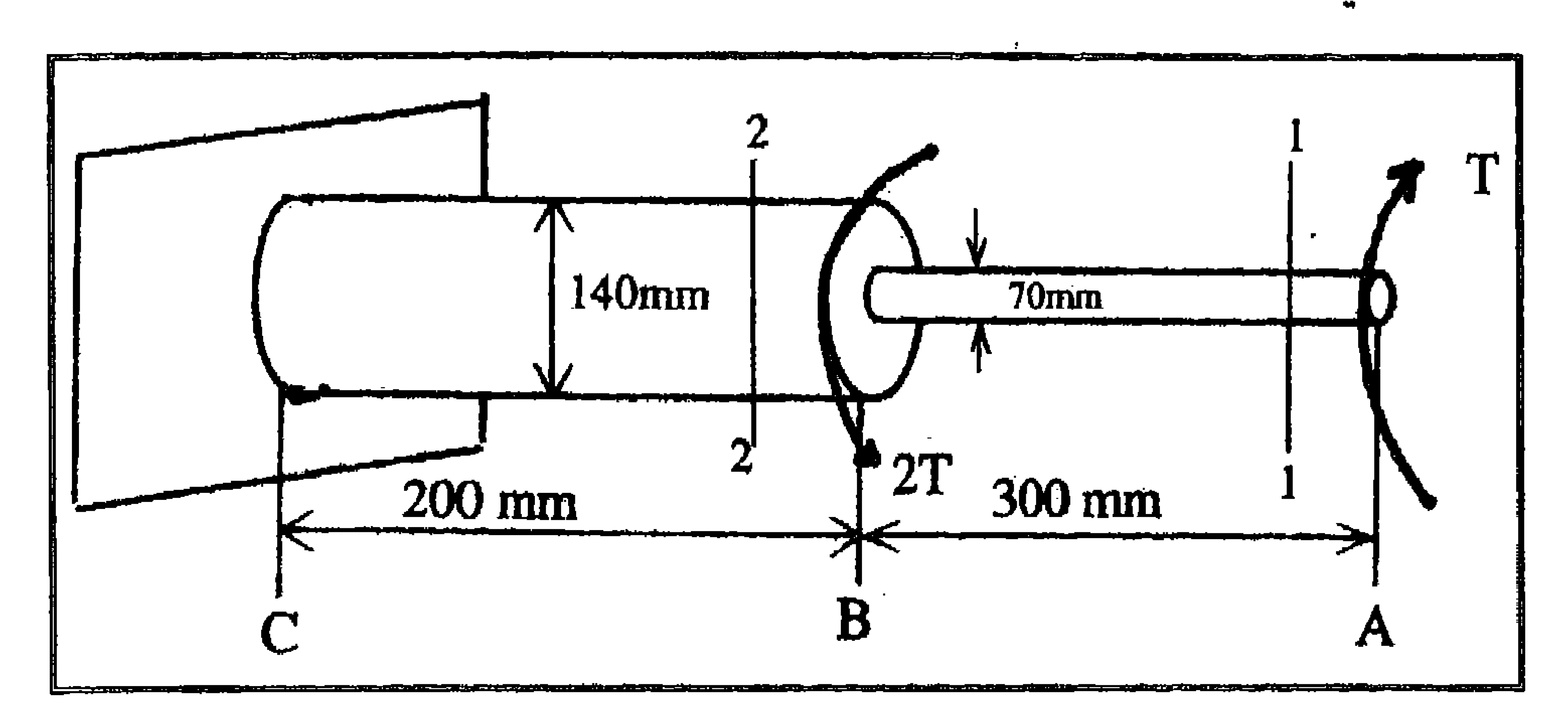
والآن نقوم بحساب زاوية اللي عند الطرف الحر وتكون زاوية اللي التراكمية للمقاطع الأربعة:

$$\theta_T = \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{CD} + \theta_{DE}$$

$$= (175\times10^{-6}) + (145\times10^{-6}) + (136\times10^{-6}) + (340\times10^{-6})$$

$$= 796\times10^{-6}\,Rad.$$

(5.6) عمود إدارة مصمت مدرج (الشكل (4-5)) يتعرض إلى عزمي اللي (T) و(2T)، إذا علمت أن أعظم إجهاد قص التوائي في العمود (120MPa) ومعامل المرونة القصي (90GPa)، احسب زاوية اللي عند الطرف الحر.



شكل (4-5)

الحل:

نقوم بحساب عزم القصور الذاتي القطبي في المقطعين:

$$J_{AB} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi}{32} \times \left(70 \times 10^{-3}\right)^4 = 2.36 \times 10^{-6} m^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi}{32} \times \left(140 \times 10^{-3}\right)^4 = 3.77 \times 10^{-5} m^4$$

نفرض أن إجهاد القص الأعظم موجود في المقطع (AB) فيكون:

$$\tau_{max(AB)} = \left(\frac{Tr}{J}\right)_{AB} = \frac{-T \times \left(35 \times 10^{-3}\right)}{2.36 \times 10^{-6}} = -1.48 \times 10^3 \, T \, ...(1)$$

حيث أن المقطع (AB) يؤثر عليه عزم اللي مع عقارب الساعة لذلك أعطي إشارة السالب، ونحسب الآن مقدار عزم اللي في المقطع (BC) الكلي المؤثر في هذا الجزء.

$$T_{BC} = 2T - T = T$$

هذه القيمة موجبة لعزم اللي حيث أن هذا العزم اتجاهه بعكس عقارب الساعة، ونقوم الآن بافتراض أن إجهاد القص الأعظم موجود في المقطع (BC) فيكون:

$$\tau_{max(BC)} = \left(\frac{TR}{J}\right)_{BC} = \frac{T\left(70\times 10^{-3}\right)}{3.77\times 10^{-5}} = 1.86\times 10^{3}\, T \quad ....(2)$$

وبمقارنة معاملات (T) في المعادلتين (1) و (2) نجد أن معامل (T) في المعادلة (2) أكبر، إذاً تكون هي المعادلة الصحيحة لإجهاد القص الالتوائي الأعظم، ومن (2) نحسب قيمة (T) الصحيحة:

$$\tau_{max(BC)} = 1.86\times 10^{3}\, T$$

$$120\times 10^{6} = 1.86\times 10^{3} T \longrightarrow T = \frac{120\times 10^{6}}{1.86\times 10^{3}} = 64.52 MN.m$$

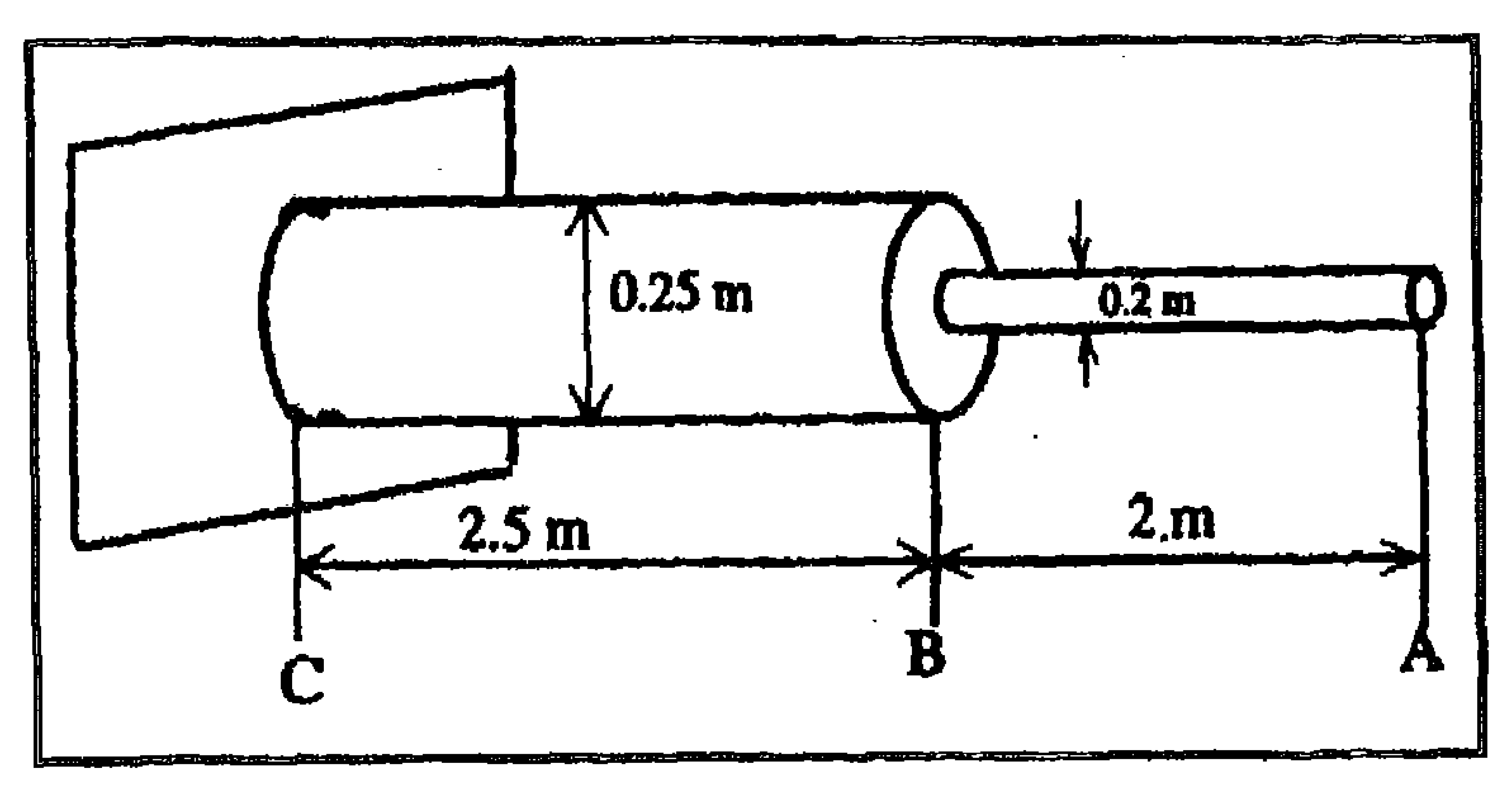
نقوم الآن بحساب قيمة زاوية اللي الكلية عند الطرف الحر.

$$\theta_T = \theta_{AB} + \theta_{BC} = \left(\frac{TL}{JG}\right)_{AB} - \left(\frac{TL}{JG}\right)_{BC}$$

$$= \left(\frac{\left(64.52 \times 10^{-3}\right)\times 0.3}{\left(2.36\times 10^{-6}\right)\times\left(90\times 10^{9}\right)}\right) - \left(\frac{\left(64.52 \times 10^{-3}\right)\times 0.2}{\left(3.77\times 10^{-5}\right)\times\left(90\times 10^{9}\right)}\right)$$

$$= 91.13\times 10^{-9} - 3.8\times 10^{-9} = 87.3\times 10^{-9}\, Rad.$$

(5.7) قضيب معدني مصمت مدرج كما هو موضح في الشكل (5-5) يتكون من الجزء (AB) من الحديد معامل مرونته القصي ($G_{st} = 80GPa$)، والجزء (BC) من البرونز ومعامل القص له ($G_B = 40GPa$) وإجهاد القص الالتوائي المسموح به للقضيب هو ($\tau_{all} = 80MPa$)، وكانت زاوية اللي العظمى ($\theta_{max} = 0.05Rad$)، احسب عزم اللي الأقصى (τ_{max}).



الشكل (5-5)

الحل:

$$J_{AB} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (0.2)^4}{32} = 1.57 \times 10^{-4}\, m^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (0.25)^4}{32} = 3.84 \times 10^{-4}\, m^4$$

نفرض أن الإجهاد الأعظم يكون في الجزء (AB):

$$\tau_{all} = \tau_{max} = \left(\frac{Tr}{J}\right)_{AB} = \frac{T \times 0.1}{1.57 \times 10^{-4}} = 636.94\,T$$

ونفرض أيضاً أن الإجهاد الأعظم يكون في الجزء (BC):

$$\tau_{all} = \tau_{max} = \left(\frac{Tr}{J}\right)_{BC} = \frac{T \times 0.125}{3.84 \times 10^{-4}} = 32.52\,T$$

وبما أن معامل (T) في الجزء (AB) أكبر، إذاً يكون عندها الإجهاد الأعظم ومنها نحسب قيمة (T).

$$\tau_{max} = 636.94\,T_{AB}$$

$$80 \times 10^6 = 636.94\,T_{AB} \longrightarrow T_{AB} = \frac{80 \times 10^6}{636.94} = 125.6\,KN.m$$

ولحساب قيمة (T) في الجزء (BC) نلجأ إلى معادلة (θ_{max}):

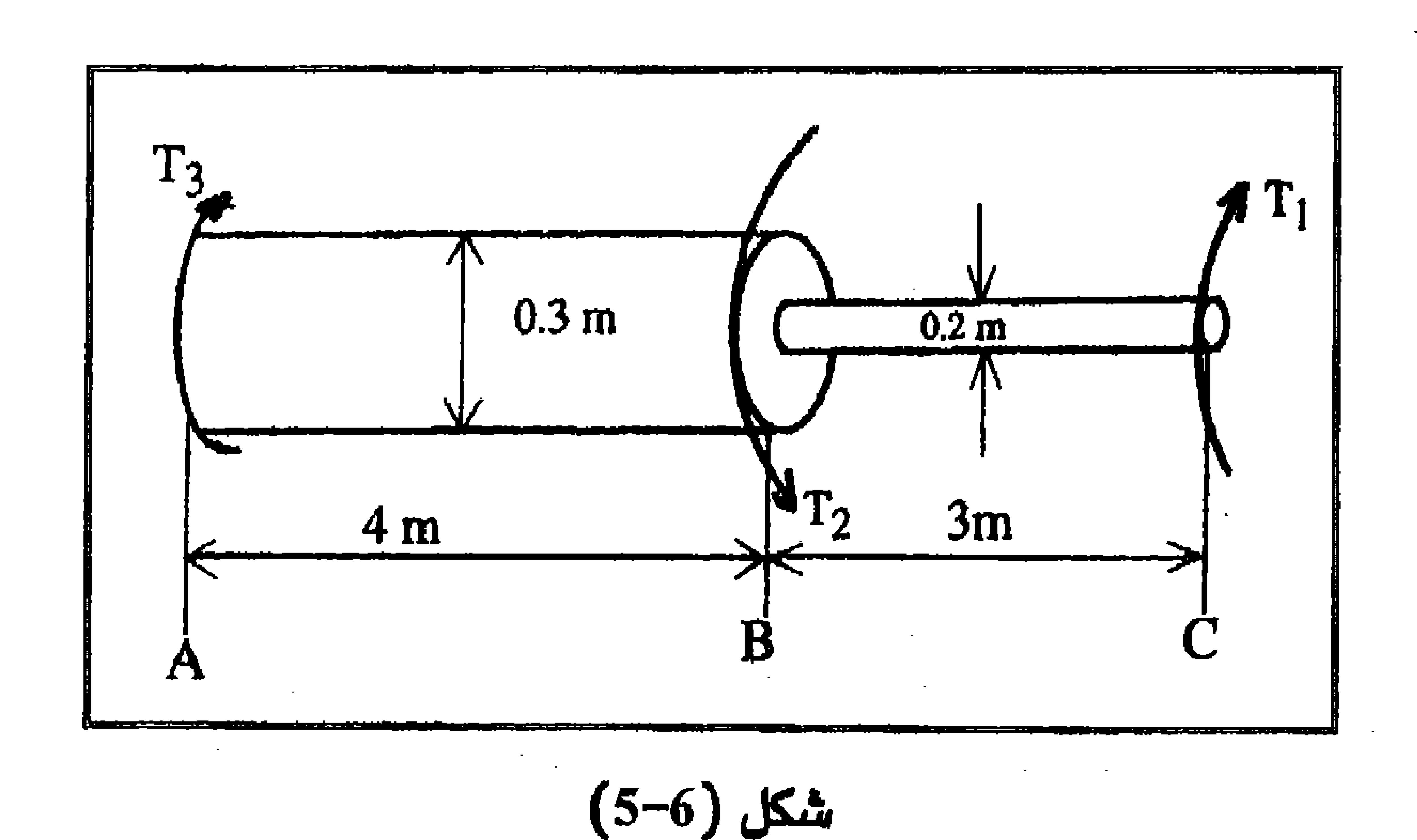
$$\theta_{max} = \theta_{AB} + \theta_{BC} = \left(\frac{TL}{GJ}\right)_{AB} + \left(\frac{TL}{GJ}\right)_{DC} = \left[\frac{(125.6\times10^{3})\times 2}{(80\times10^{9})\times(1.57\times10^{-4})}\right]$$

$$+\left[\frac{T_{BC}\times\ 2.5}{(40\times10^{9})\times(3.84\times10^{-4})}\right]$$

$$0.05 = 0.02 + 1.63\times10^{-7}\ T_{BC} \longrightarrow T_{BC} = 184.32\,KN.m$$

إذاً تكون قيمة عزم اللي الأقصى هي (184.32KN.m) وتكون في الجزء (BC).

(5.8) قضيب مدرج مصمت، يتعرض لثلاث عزوم لي هي (T_1) و(T_2) و(T_3) كما هو موضح في الشكل (5-6)، وإذا كان معامل المرونة القصي للقضيب هو (90GPa)، وكان إجهاد القص الالتوائي الأعظم في الجزء (AB) ويساوي (140MPa)، وكانت زاوية اللي في الجزء (AC) هي (0.098Rad)، أوجد مقدار كل من (T_3, T_2, T_1).



شكل (5-6)

الحل:

بما أن النظام متزن فإن:

$$\sum T = 0$$

$$\sum T = T_1 - T_2 + T_3 = 0$$

$$T_1 - T_2 = -T_3 \longrightarrow T_3 = T_2 - T_1 \quad \text{.......................................} (1)$$

الجزء (AB) يتعرض لإجهاد القص الالتوائي الأعظم، وتكون قيم عزم اللي الكلية المؤثرة عليه هي حاصل طرح (T_1) من (T_2) لأنهما متعاكستين في الاتجاه، وهي قيمة (T_3)، وبالتالي فإن:

$$\tau_{max(AB)} = \frac{T_3 \times r_{AB}}{J_{AB}} \quad \text{.......................................} (2)$$

نحسب الآن مقدار عزم القصور الذاتي القطبي للجزئين (AB) و(BC).

$$J_{AB} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi}{32} \times (0.3)^4 = 7.95 \times 10^{-4} m^4$$

$$J_{BC} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi}{32} \times (0.2)^4 = 1.57 \times 10^{-4} m^4$$

وبالتالي يمكن حساب (T_3) من المعادلة (2):

$$\tau_{max(AB)} = \frac{T_3 \times r_{AB}}{J_{AB}} \longrightarrow T_3 = \frac{\tau_{max} J_{BC}}{r_{AB}}$$

$$T_3 = \frac{140 \times 10^6 \times 7.95 \times 10^{-4}}{0.15} = 742 KN.m$$

ومن معادلة زاوية اللي الكلية يمكن إيجاد قيمة (T_1):

$$\theta_T = \theta_{AB} + \theta_{BC} = \frac{(T_2 - T_1) L_{AB}}{G J_{AB}} + \frac{T_L L_{BC}}{G J_{BC}}$$

$$= \frac{T_3 L_{AB}}{G J_{BC}} + \frac{T_1 L_{BC}}{G J_{BC}}$$

$$0.098 = \frac{(742 \times 10^3) \times 4}{(90 \times 10^9) \times (7.95 \times 10^{-4})} + \frac{T_1 \times 3}{(90 \times 10^9) \times (1.57 \times 10^{-4})}$$

$$T_1 = 461.4 KN.m$$

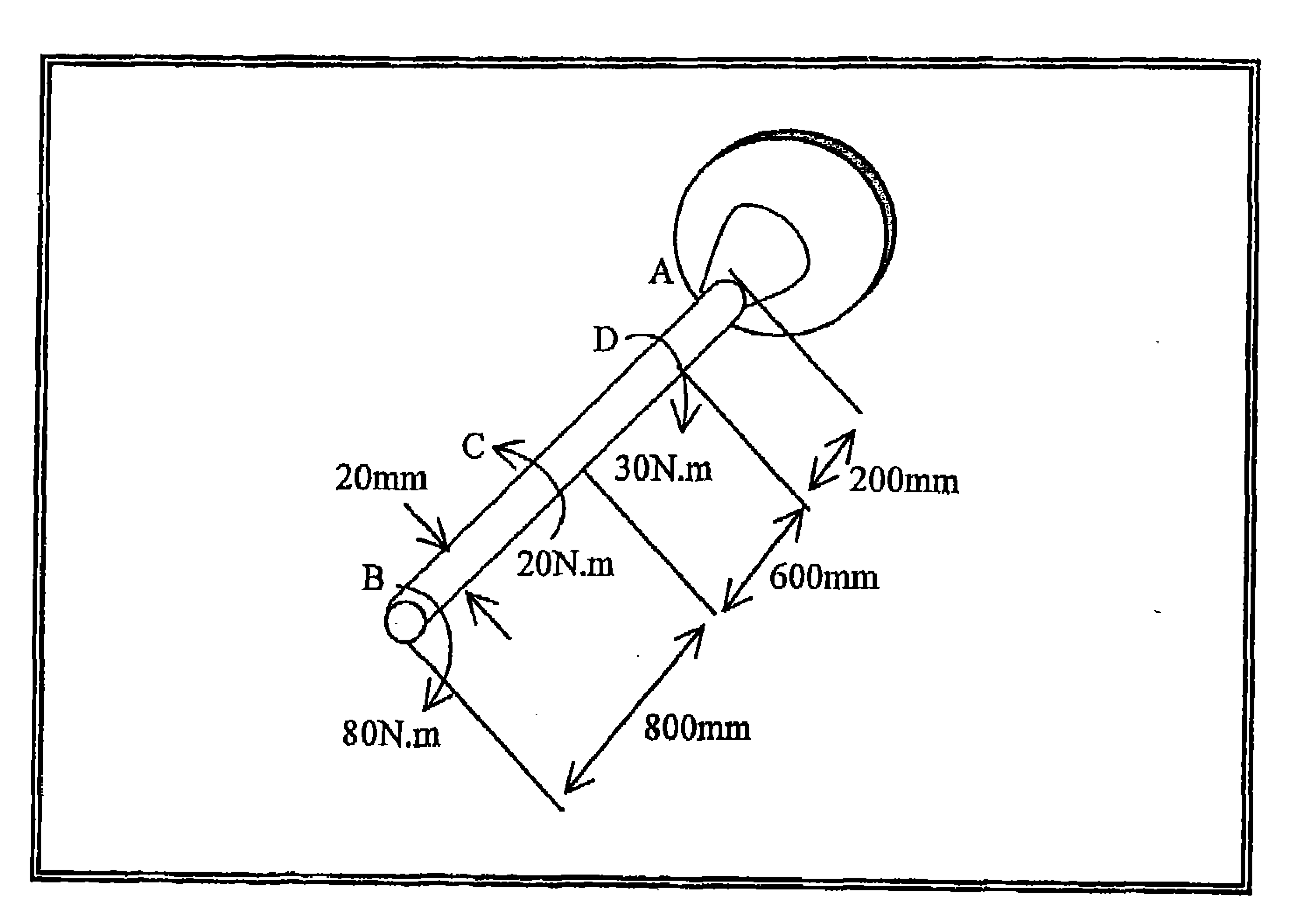
وللحصول على قيمة (T_2) نعوض كل من (T_1) و (T_3) في المعادلة رقم (1):

$$T_3 = T_2 - T_1$$

$$742 = T_2 - 461.4$$

$$T_2 = 742 + 461.4 = 1.2 \text{ MN.m}$$

(5.9) قضيب فولاذي معامل جساءته 75 GPa ويتعرض للعزوم التالية، أوجد زاوية الليّ عند النقطة B.



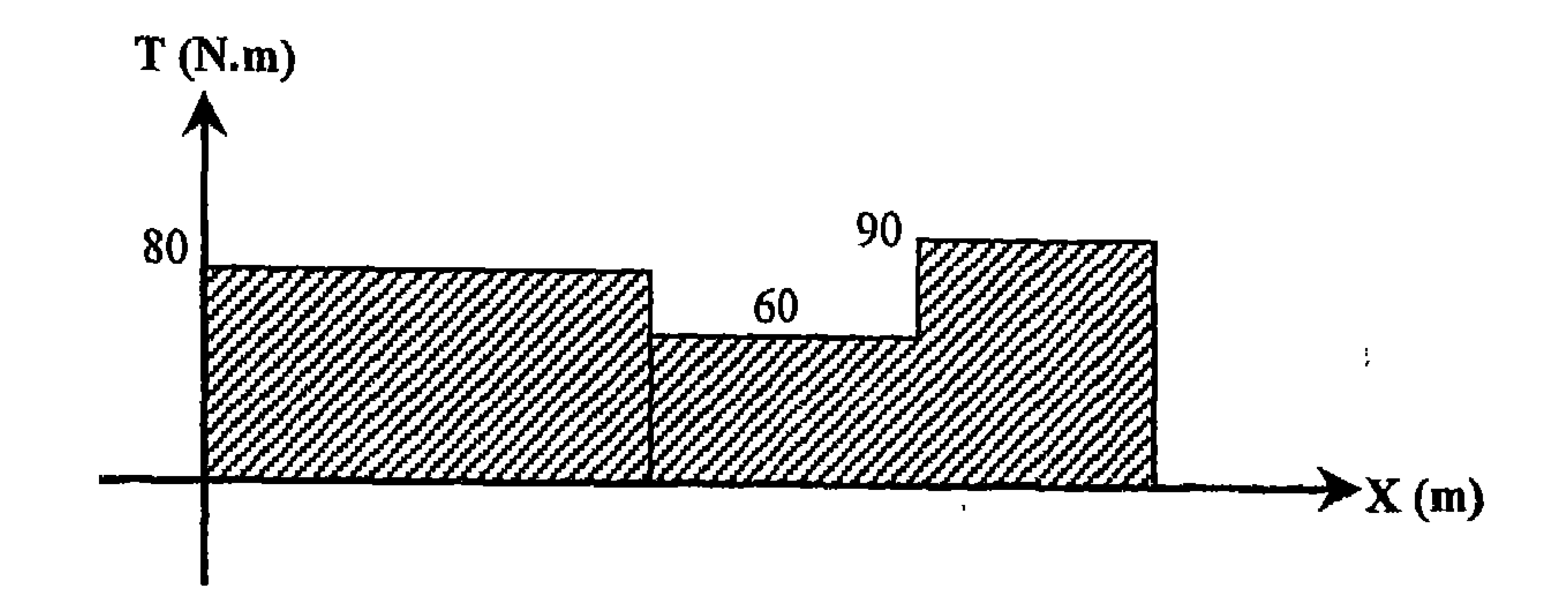
شكل (7-5)

الحل:

80N.m
B
80N.m

60 N.m
20 N.m
B
80 N.m

90N.m
20N.m
30N.m
80N.m

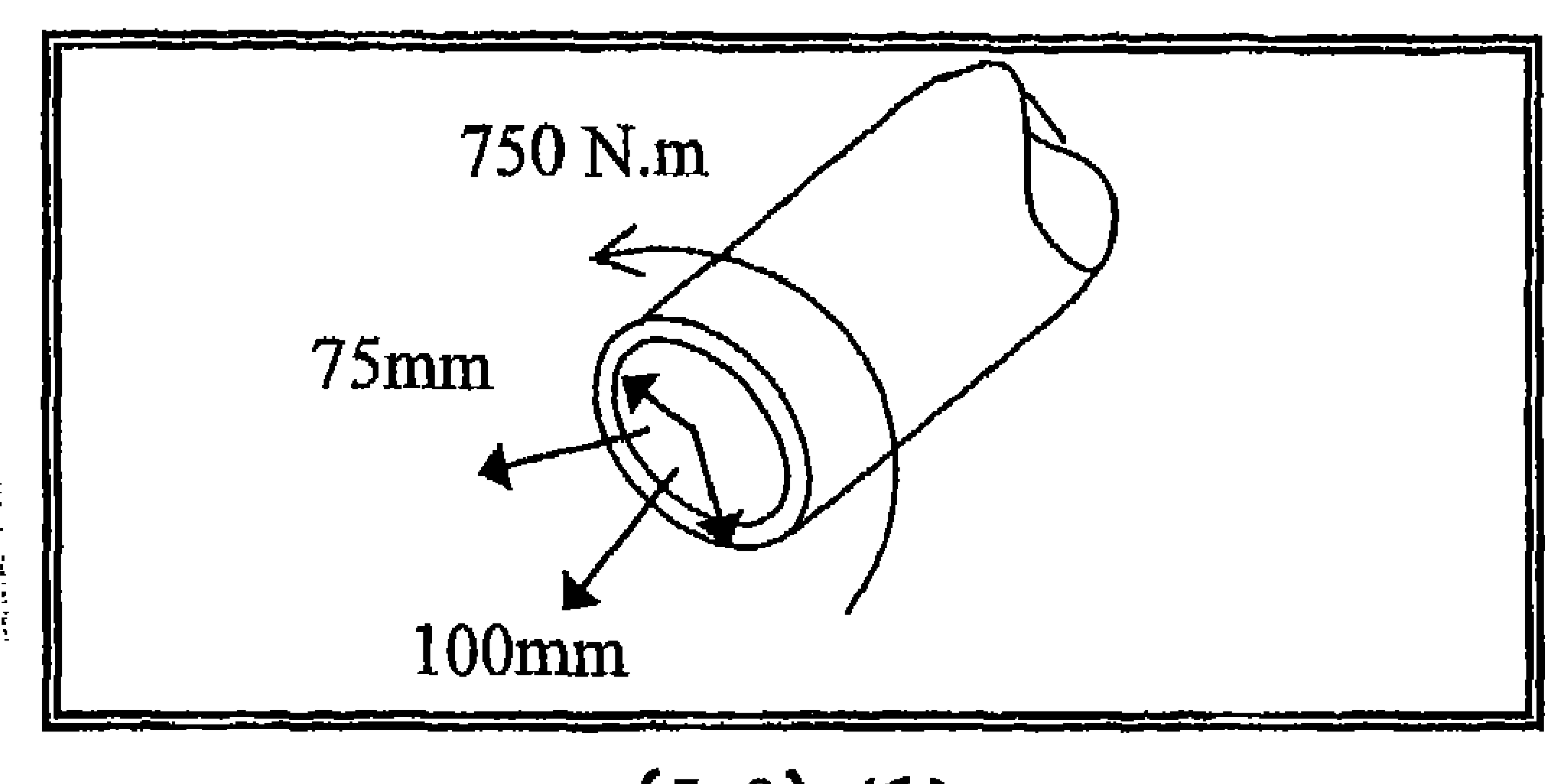


$$\theta = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{80 \times 0.8}{\frac{1}{2}\pi \left(0.01\right)^4 \times 75 \times 10^9} + \frac{60 \times 0.6}{\frac{1}{2}\pi \left(0.01\right)^4 \times 75 \times 10^9}$$

$$+ \frac{90 \times 0.2}{\frac{1}{2}\pi \left(0.01\right)^4 \times 75 \times 10^9}$$

$$= 0.1\text{Rad} = 5.74^\circ$$

(5.10) أنبوب مجوف يتعرض لعزم لي مقداره 750 N. m، أوجد إجهاد القص المتولد.



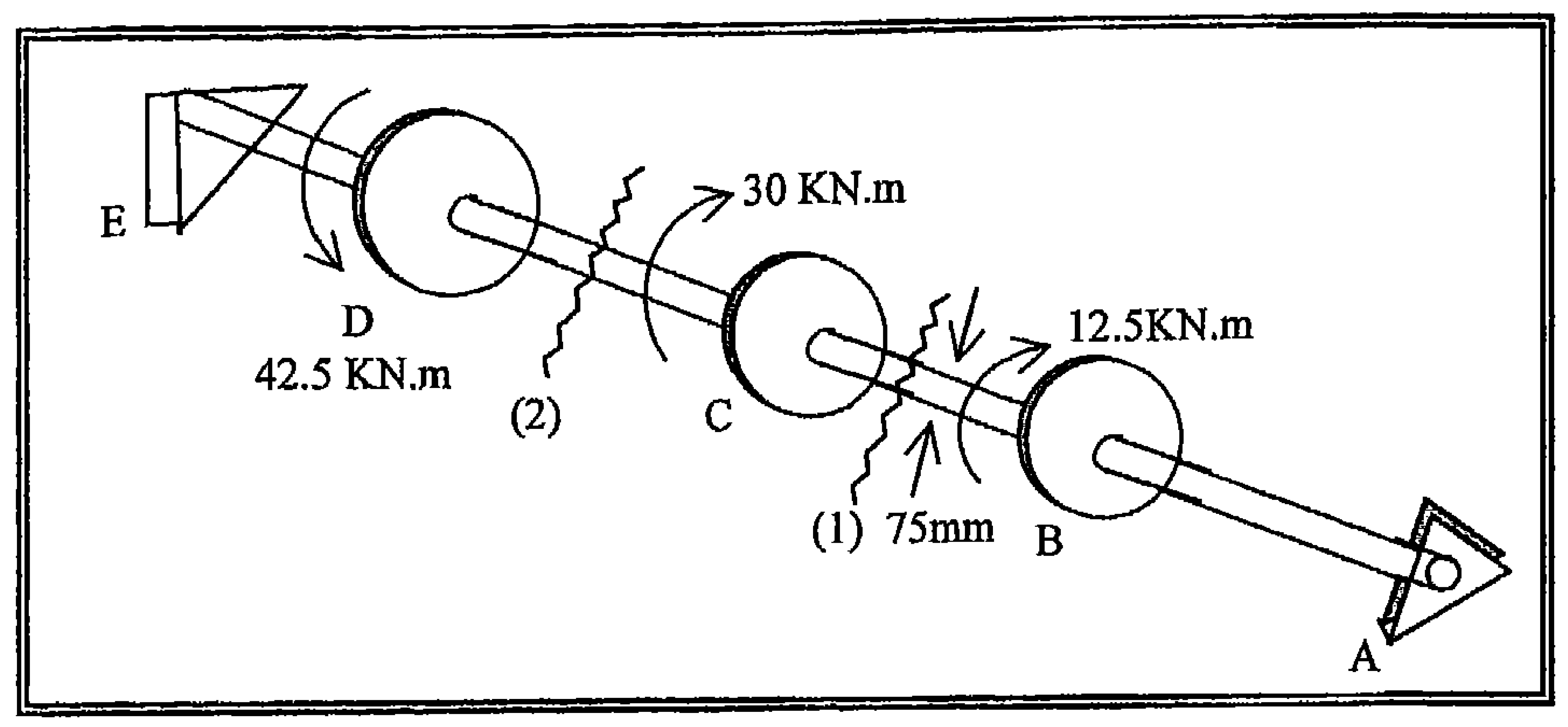
شكل (5-8)

الحل:

$$\tau_{max} = \frac{750 \times 0.1}{\frac{1}{2}\pi \left(0.1^4 - 0.075^4\right)}$$

$$= 698.5 \text{ KPa}$$

(5.11) في الشكل التالي أوجد الإجهاد في المقطع BC، CD؟



شكل (5-9)

الحل:

$$\tau_{BC} = \frac{12.5 \times 10^3 \times 0.0375}{\frac{1}{2}\pi\,(0.0375)^4} = 150.9 \text{ MPa}$$

12.5KN.m

12.5KN.m

(1)

$$\tau_{CD} = \frac{42.5 \times 10^3 \times 0.0375}{\frac{1}{2}\pi\,(0.0375)^4} = 513 \text{ MPa}$$

30 KN.m

42.5 KN.m

12.5KN.m

(2)

5-4) القدرة المنقولة بواسطة أعمدة الدوران:

تعرف القدرة على أنها الطاقة المنجزة خلال وحدة الزمن، وبالنسبة لأعمدة الدوران فإنها عندما تدور بسرعة زاوية معينة (ω) وتحمّل بعزم دوران،

فإنها تكون قد عملت شغلا خلال الزمن حيث أن وحدة العزم هي (N.m) ووحدة (ω) هي (Rad/s) وبالتالي فإن الوحدة (N.m/s) هي وحدة القدرة (P) وهي تكافئ الواط (W) حيث أن هذه القدرة تنقلها أعمدة الدوران من طرف إلى آخر، وتعطى معادلة القدرة المنقولة بواسطة أعمدة الدوران بالعلاقة:

$$P = T\,\omega \quad \text{.......................................} \quad (5\text{-}9)$$

$$\text{OR} \quad P = 2\,\pi\, f\, \omega$$

حيث:

P : القدرة المنقولة (W).

T : عزم الالتواء (N. m).

ω: السرعة الزاوية (Rad/s).

$$\omega = 2\,\pi\, f$$

f : التردد (Hz).

أمثلة محلولة:

(5.12) عمود مجوّف قطره الداخلي 30mm وقطره الخارجي 42mm، يستخدم لنقل قدرة مقدارها 90kW، أوجد تردد العمود بحيث يتحمل 50MPa.

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$$

$$50 \times 10^6 = \frac{T \times 0.021}{\frac{1}{2}\pi\left[(0.021)^4 - (0.015)^4\right]}$$

$$T = 538 \text{ N.m}$$

$$P = 2\,\pi\, f\, T$$

$$90 \times 10^3 = 2\,\pi\, f \times 538$$

$$f = 26.6 \text{ Hz}$$

(5.13) محرّك كهربائي قدرته 0.1 HP يدور بسرعة 80 rev/ min، إذا علمت أن إجهاد القص الممكن تحمله هو 10 MPa أوجد أقل قطر لمحور المحرّك.

$$P = T \times \omega$$

$$0.1 \times 746 = T \times 80 \times \frac{2\pi}{60} \quad \Rightarrow \quad T = 8.9\,N.m$$

$$\tau = Tr / J$$

$$10 \times 10^6 = \frac{8.9 \times r}{\frac{1}{2}\pi r^4}$$

$$r = 0.0083\ m$$

$$= 8.3\ mm$$

$$d = 16.6\ mm.$$

(5.14) عمود دوران صلد قطره (150mm)، وينقل قدره مقدارها (100kW) وبسرعة زاوية مقدارها (160 rpm). احسب أعظم إجهاد قص التوائي تم تسليطه على هذا العمود، وكذلك أوجد زاوية اللي القصوى لكل متر طولي، إذا علمت أن معامل الصلابة لهذا العمود (80GPa).

الحل:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$= 16.67\ Rad/\,s$$

$$P = T\,\omega$$

$$T = P / \omega = \frac{100 \times 10^3}{16.76} = 5.97 KN.m$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi\,(0.15)^4}{32} = 4.97 \times 10^{-5} m^4$$

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} = \frac{(5.97 \times 10^3) \times (0.075)}{4.97 \times 10^{-5}} = 9.01 MPa$$

$$\frac{\theta}{L}=\frac{T}{GJ}=\frac{5.97\times10^{3}}{\left(80\times10^{9}\right)\left(4.97\times10^{-5}\right)}=1.5\times10^{-3}\,\text{Rad}/\text{m}$$

(5.15) أوجد قياسات عمود دوران أجوف، نسبة أقطاره (4: 3)، ينقل قدرة مقدارها (70KW) وبسرعة (250 Rev/min)، وإجهاد القص الالتوائي الأعظم (60MPa)، وزاوية اللي القصوى مقدارها (0.066 Rad)، وطول هذا العمود (5m) ومعامل الصلابة له (80GPa).

الحل:

بما أن معادلة كل من إجهاد القص الالتوائي الأعظم (τ_{max}) ومعادلة زاوية اللي القصوى (θ_{max}) يعطوننا قيم مختلفة لقطر هذا العمود، لذلك نقوم بحساب قيمة (D) الداخلية والخارجية من كلا المعادلتين ونأخذ بعين الاعتبار القيمة الأكبر وذلك لعدم تجاوز الحدود.

$$\omega=2\pi n/60=\frac{2\text{x}\pi\text{x}250}{60}=26.2\,\text{rev}/\text{sec}$$

$$P=T\,\omega\rightarrow T=P/\omega=\frac{70\times10^{3}}{26.2}=2.67\text{KN.m}$$

❖ **أولاً من إجهاد القص الالتوائي الأعظم.**

$$\tau_{max}=\frac{Tr_2}{J}$$

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{3}{4}\longrightarrow r_1=\frac{3}{4}r_2=0.75r_2$$

ولذلك يكون عزم القصور الذاتي القطبي:

$$J=\frac{\pi}{2}\left(r_2^4-r_1^4\right)=\frac{\pi}{2}\left[(r_2)^4-(0.75r_2)^4\right]$$

$$=\frac{\pi r_2^4}{2}\left[(1)^4-(0.75)^4\right]=\frac{\pi r_2^4}{2}\left[1-0.316\right]$$

$$J = \frac{0.689\pi r_2^4}{2} = 1.074\pi r_2^4$$

وبتعويض هذه القيمة في معادلة إجهاد القص الالتوائي الأعظم:

$$\tau_{max} = \frac{Tr_2}{J} = \frac{Tr_2}{1.074 r_2^4} = \frac{T}{1.074 r_2^3}$$

$$1.074 r_2^3 = \frac{T}{\tau_{max}} \longrightarrow r_2^3 = \frac{T}{1.074\ \tau_{max}}$$

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{T}{1.074\tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{2.67\times10^3}{1.074\times60\times10^6}} = 0.035$$

ومنه تكون قيمة (r_1) مساوية لـ:

$$r_1 = 0.75\ r_2 = 0.75 \times 0.035 = 0.026\ m$$

❖ **ثانيا من قيمة زاوية اللي القصوى:**

$$\theta_{max} = \frac{TL}{GJ} \longrightarrow J = \frac{TL}{\theta_{max}\ G}$$

$$J = \frac{2.67\ \times\ 10^3\times5}{0.066\times80\times10^9} = 2.53\times10^{-6} m^4$$

ولكن:

$$J = 1.074 r_2^4$$

لذلك:

$$1.074 r_2^4 = 2.53\times10^{-6}$$

$$r_2 = \sqrt[4]{\frac{2.53\times10^{-6}}{1.074}} = 0.039m$$

ومنه تكون قيمة r_1 مساوية لـ:

$$r_1 = 0.75\ r_2 = 0.75\times0.039 = 0.029\ m$$

وبما أن قيمتا (r_1) و (r_2) المحسوبة من معادلة (θ_{max}) أكبر من قيمتها المسحوبة من (τ_{max}) لذلك هما اللتان يتم الأخذ بهما لتحديد أبعاد عمود الدوران، فيكون مقدار القطر الداخلي (58mm) والقطر الخارجي (78mm).

مسائل إضافية:

(5.1) إذا تعرض قضيب مصمت دائري قطره (40mm) لعزم لي مقداره (0.35 KN. m) مسبباً زاوية التواء مقدارها (0.065 Rad) في طول (3m)، احسب معامل الجساءة لمادة القضيب.

(5.2) قضيب أجوف دائري قطره الخارجي (250mm) والداخلي (150mm) إذا علمت أن إجهاد القص على الرقائق الداخلية هو (100MPa)، فما هي قيمة إجهاد القص على الرقائق الخارجية؟

(5.3) احسب إجهاد القص الأعظم في قضيب مصمت دائري قطره (150m) محمل بعزم لي مقداره (50JKN.m)، وما هي قيمة زاوية الالتواء لوحدة الطول لو أن معامل الجساءة للقضيب هو (85GPa).

(5.4) احسب القدرة القصوى التي يمكن أن ينقلها قضيب مصمت من الصلب قطره (60mm) عندما يدور بسرعة مقدارها (5Rad/s) وإجهاد القص الأعظم هو (100MPa).

(5.5) عمود دوران حديدي مصمت قطره (60mm) ويدور بسرعة مقدارها (300 rpm) أوجد القدرة العظمى والتي بالإمكان نقلها ضمن إجهاد قص مقداره (70Mpa)، وإذا استبدل هذا العمود بعمود آخر أجوف له نفس القطر الخارجي ولكن إجهاد القص يقع ضمن مقدار (85MPa)، أوجد مقدار القطر الداخلي لهذا القضيب الأجوف لنقل نفس الطاقة وبنفس السرعة.

الوحدة السادسة

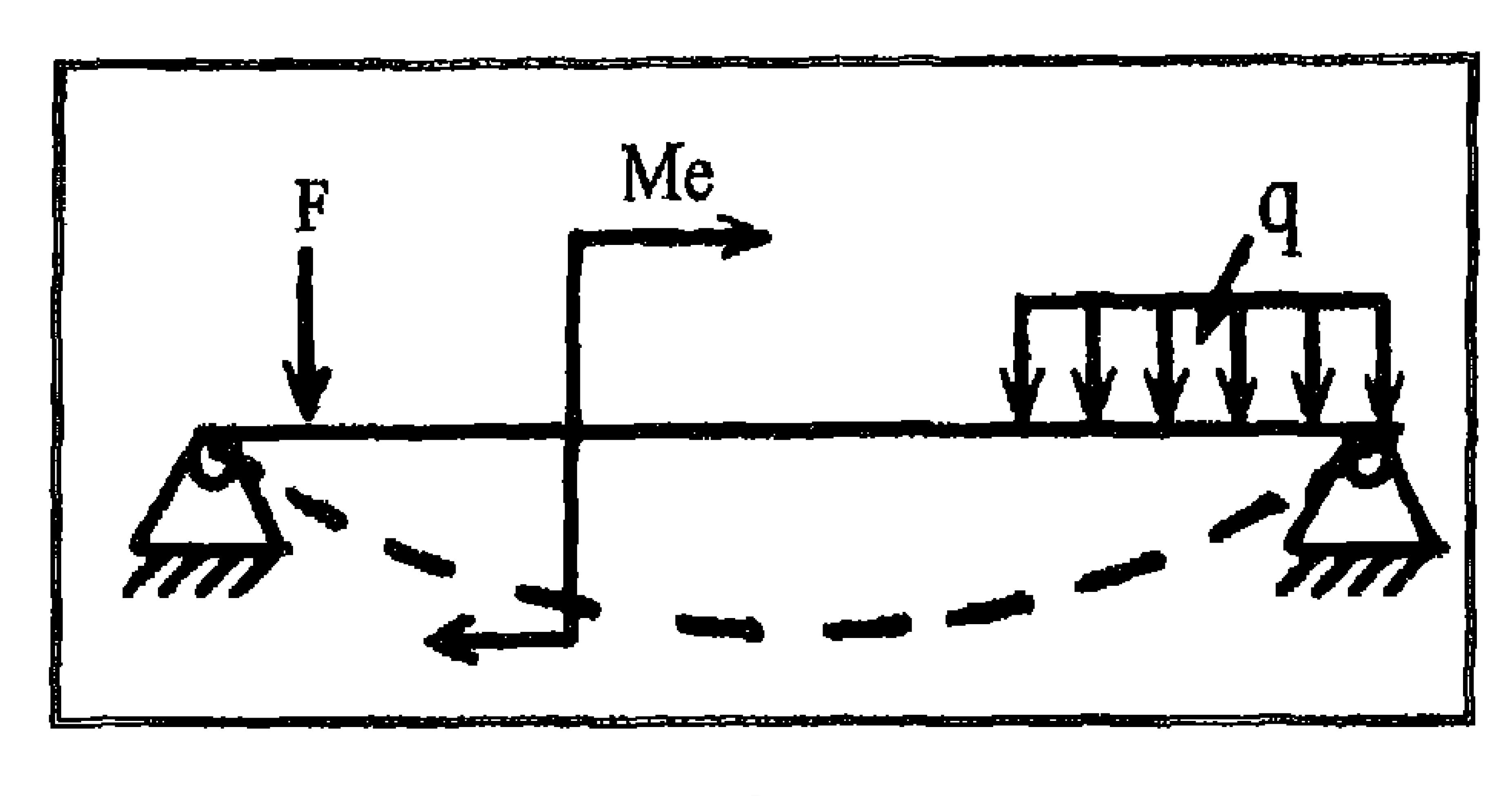
عزم الانحناء

الوحدة السادسة

عزم الانحناء

(6-1) إجهاد الانحناء والانفعال المحوري في المقاطع المتجانسة:

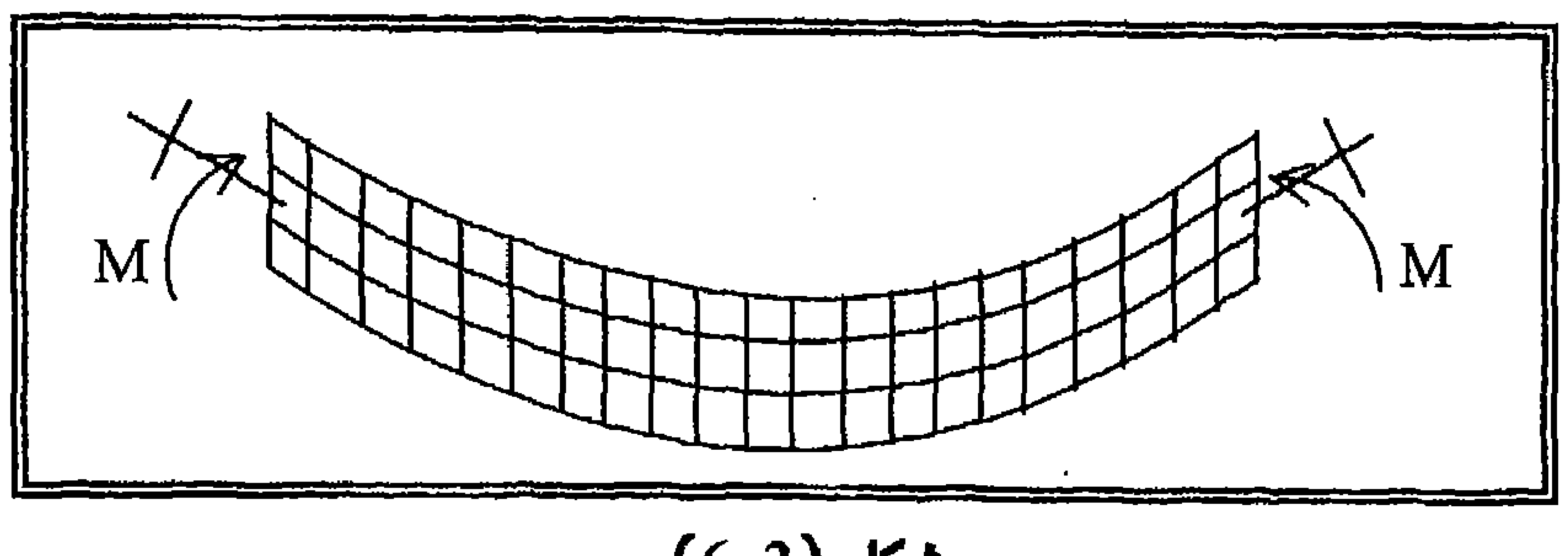
غالباً ما تتعرض القضبان لتأثير الأحمال العرضية أو القوى المزدوجة الخارجية، التي يمر مستوى تأثيرها بمحور القضيب، شكل (6-1).



شكل (6-1)

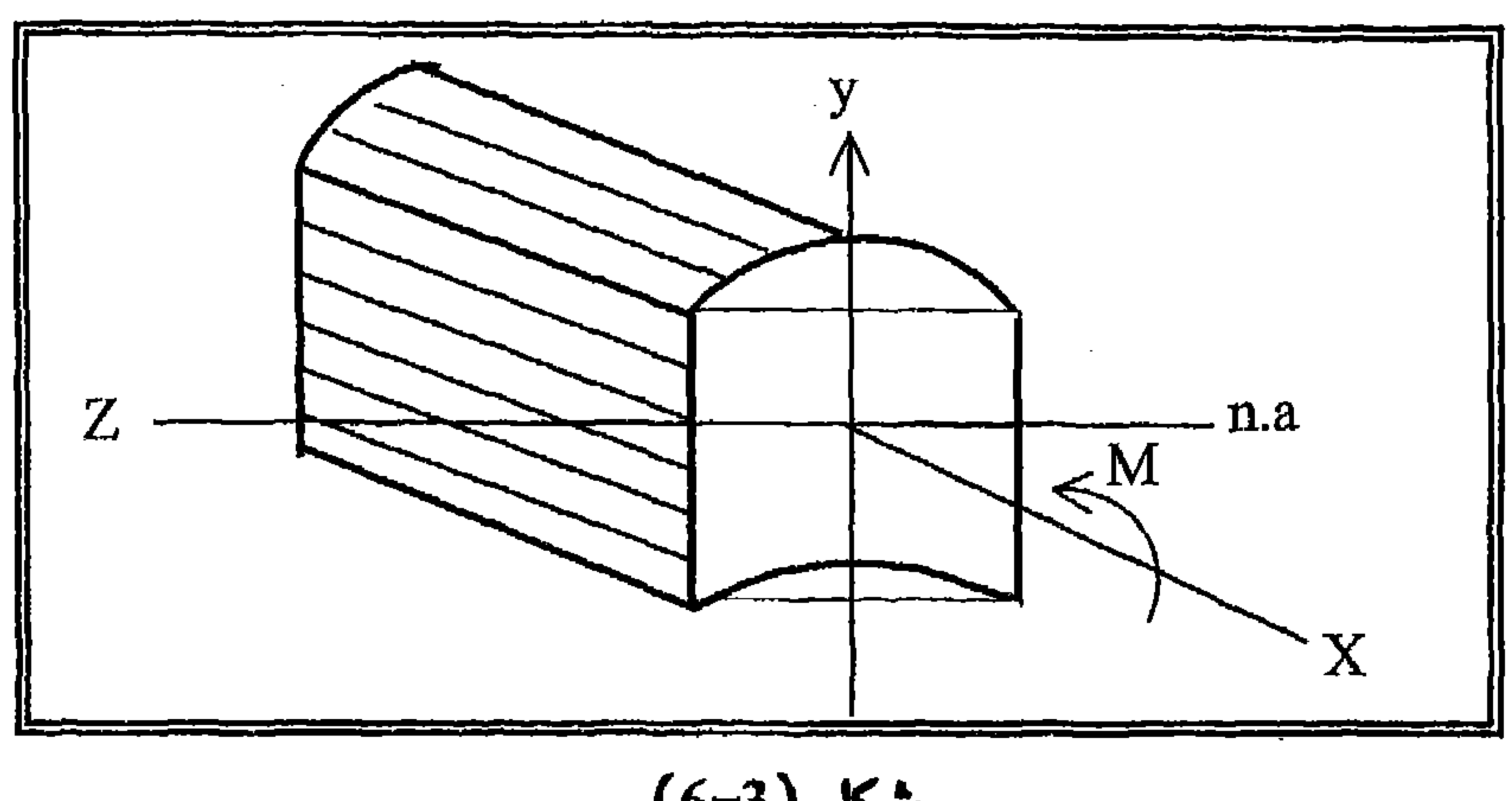
وهنا تظهر في المقاطع العرضية للقضيب عزم انحناء، أي العزوم الداخلية التي يكون مستوى تأثيرها عمودياً على مستوى المقطع العرضي للقضيب. فعند تأثير مثل هذه الأحمال، ينحني محور القضيب.

ويسمى هذا النوع من التحميل بالانحناء ان القضبان التي تعمل بالأساس على الانحناء، يطلق عليها عادة اسم العتبات، ويسمى الانحناء خالصاً إذا كان عزم الانحناء يعتبر القوة الداخلية الوحيدة في مقطع القضيب، وإذا كان مستوى تأثير عزم الانحناء يمر بأحد محاور القصور الذاتي الرئيسية المركزية لمقطع القضيب العرضي فيسمى بالانحناء البسيط أو المستوي أو الانحناء المباشر. فعند الانحناء المستوي يبقى محور العتبة في مستوى القوى الخارجية حتى بعد التشوه، أي في مستوى القوة. سندرس هنا تشوهات الانحناء بحالة الانحناء المستوي الخالص.



شكل (6-2)

- الخطوط الأفقية تصبح منحنية.
- الخطوط العمودية تبقى مستقيمة.



شكل (6-3)

- عند تعرض القضبان لعزوم انحناء فإنها تتعرض لإجهاد عمودي كما يلي:

$$\sigma = \frac{MC}{I} \quad \text{.......} \quad (6\text{-}1)$$

حيث:

σ : الإجهاد العمودي (Pa).

M: حزم الإنحناء(N.m).

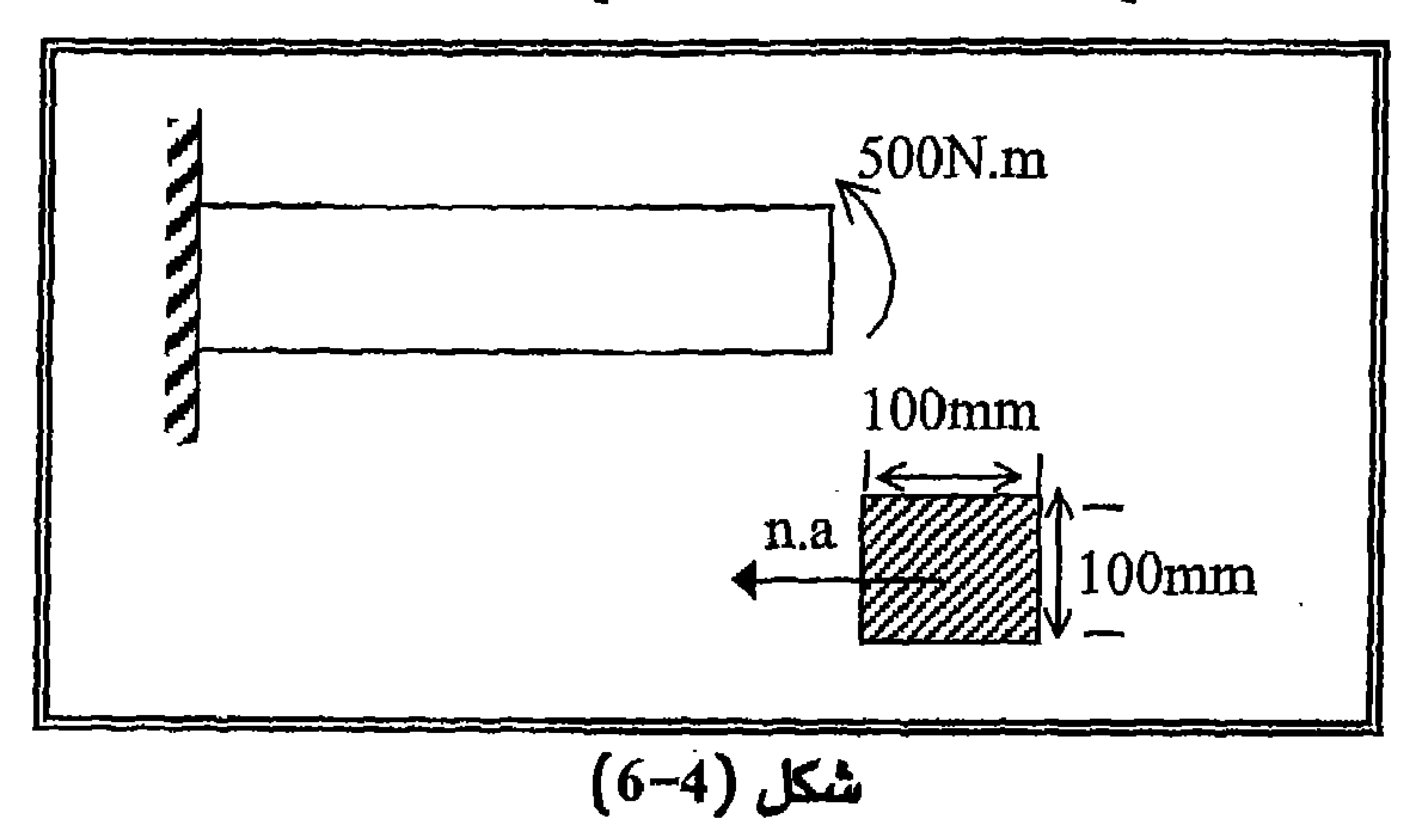
C: أبعد نقطة عن محور التعادل.

I: عزم القصور الذاتي حول محور التعادل (mm^4, cm^4, m^4).

محور التعادل (n.a) هو محور وهمي يمر من المركز الهندسي للمساحة.

أمثلة محلولة:

(6.1) في الشكل التالي أوجد الإجهاد المتولد في العتبة:



شكل (6-4)

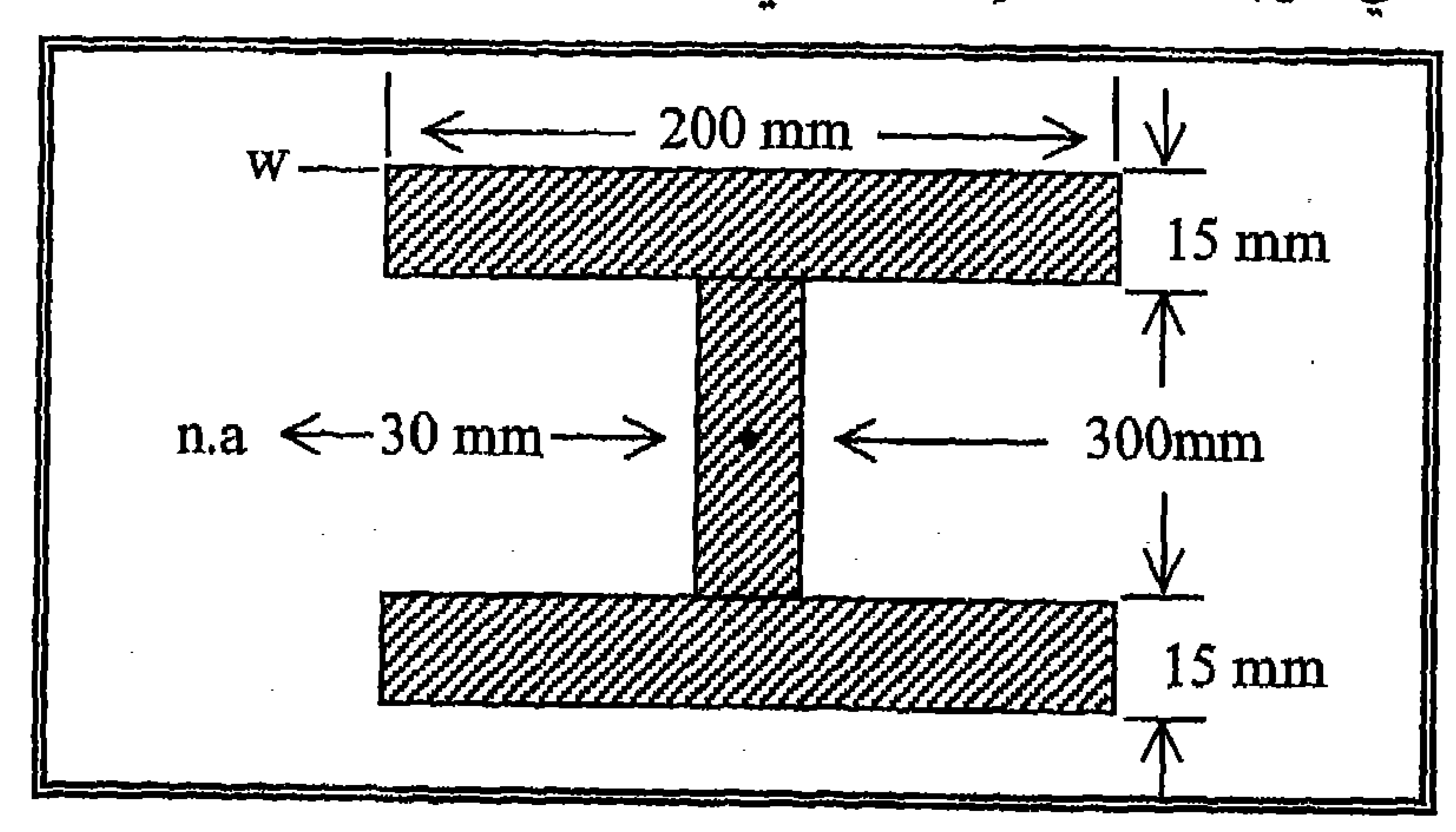
الحل:

$$C = \frac{100}{2} = 50mm$$

$$I_{n.a} = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.1(0.1)^3}{12} = 8.3 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$\sigma = \frac{500 \times 0.05}{8.3 \times 10^{-6}} = 3MPa$$

(6.2) قضيب يتعرض لعزم انحناء مقداره M = 150 KN. m، وله المقطع التالي، أوجد مقدار الإجهاد الذي يتعرض له القضيب.



شكل (6-5)

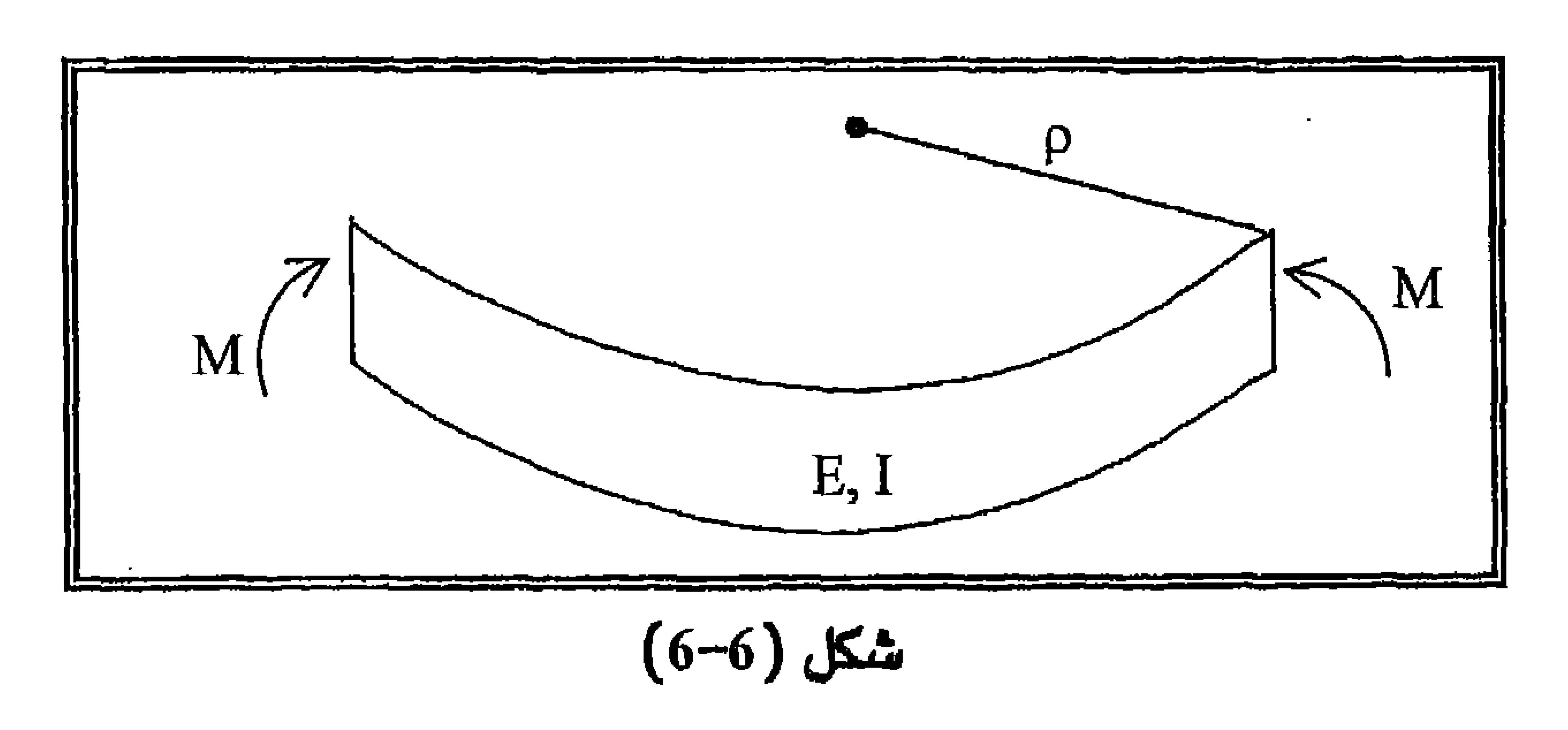
$$C = 165 \text{ mm}$$

$$I_{n.a} = \frac{0.03\,(0.3)^3}{12} + 2\left[\frac{0.2(0.015)^3}{12} + (0.2 \times 0.015)(0.1575)^2\right]$$

$$= 216.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\sigma = \frac{150 \times 10^3 \times 0.165}{216.5 \times 10^{-6}} = 114\text{MPa}$$

6-2) نصف قطر الانحناء (Radius of Curvature):



شكل (6-6)

بزيادة نصف قطر الانحناء تزاد متانة المادة. تنحني هذه نتيجة لتأثير عزم الانحناء على القضبان وينشأ نصف قطر الانحناء.

ويعطى نصف قطر الانحناء كما يلي:

$$\rho = \frac{EI}{M} \quad \text{......(6-2)}$$

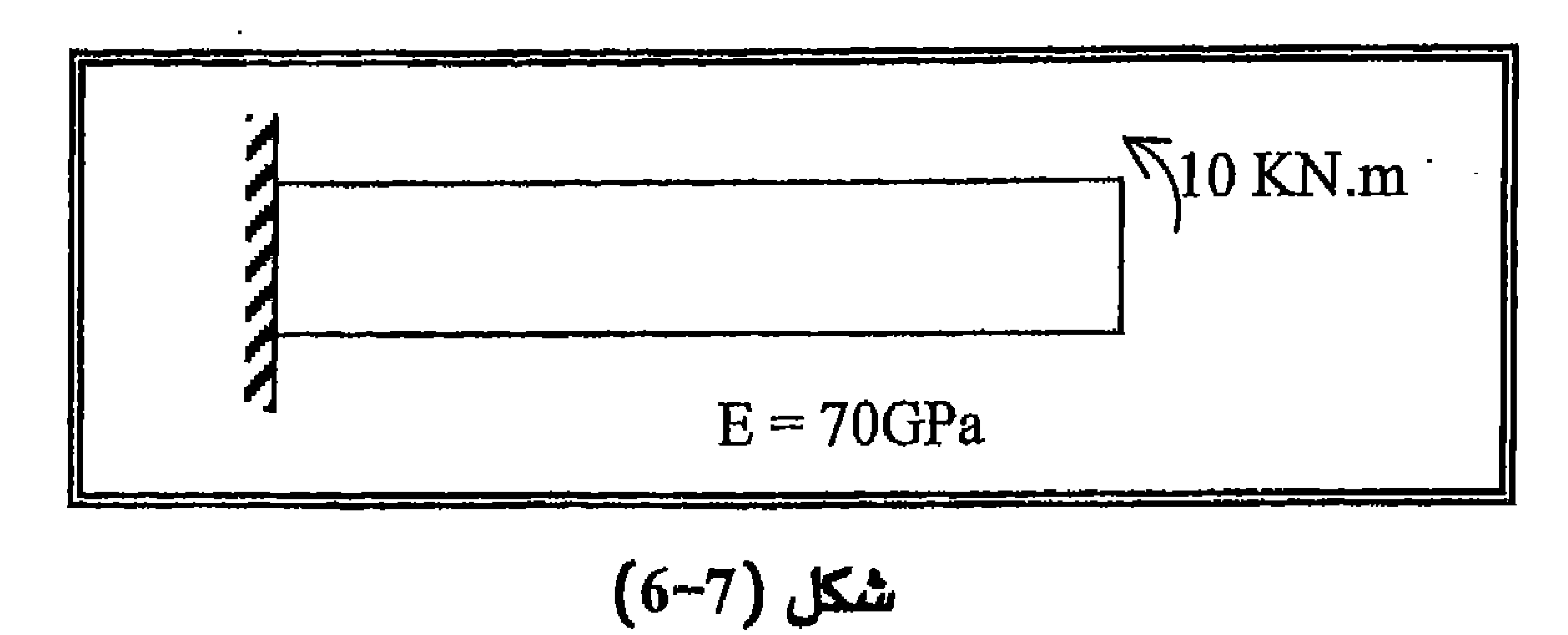
حيث:

E : معامل المرونة (Pa).

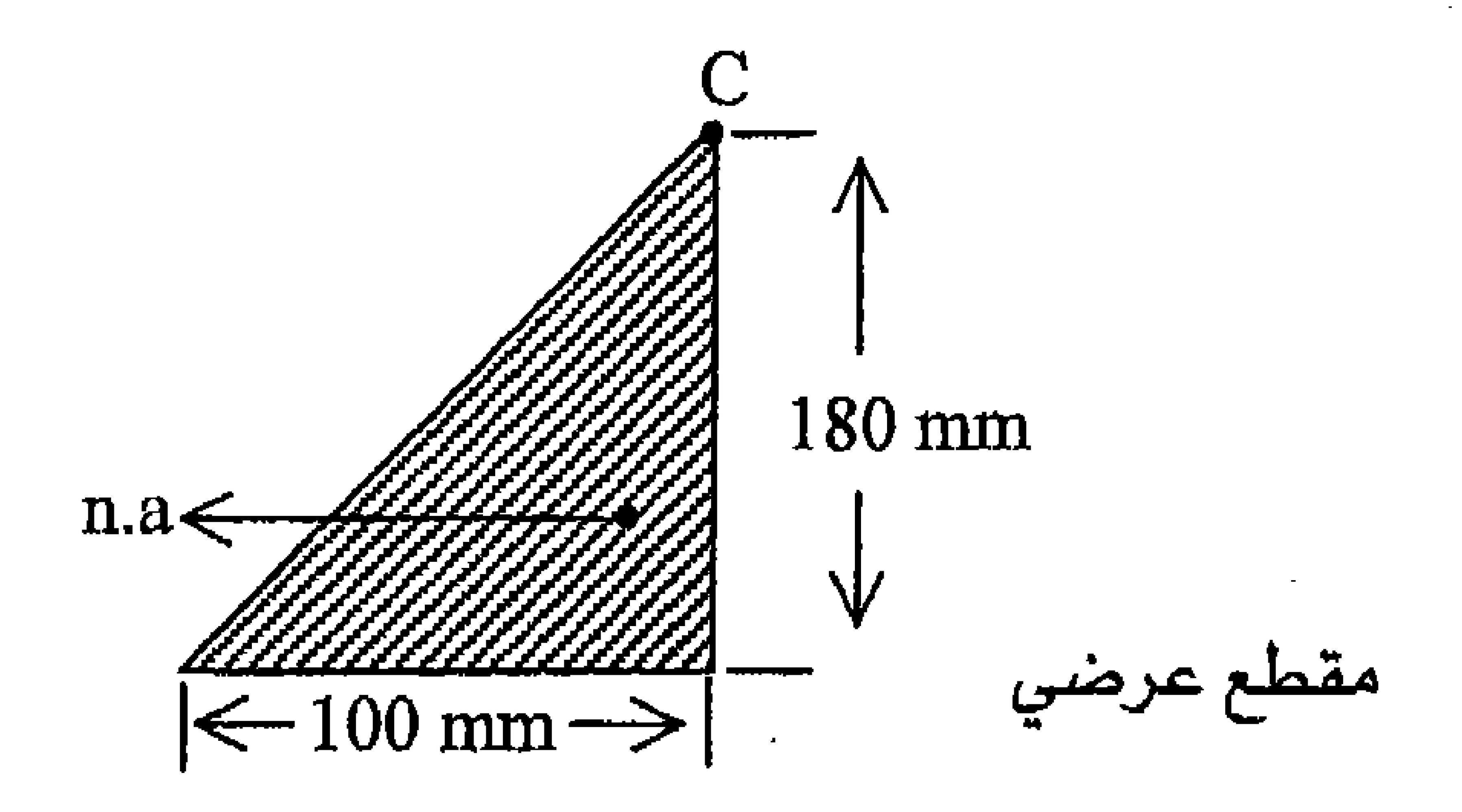
I: عزم القصور الذاتي حول محور التعادل (m^4).

M: العزم المؤثر (N.m).

(6.3) أوجد نصف قطر الانحناء للعتبة التالية:



شكل (6-7)



الحل:

$$C = 2 \times \frac{h}{3} = 2 \times \frac{180}{3} = 120\,\text{mm}$$

$$I_{n.a} = \frac{bh^3}{36} = \frac{0.1(0.18)^3}{36}$$

$$= 16.2 \times 10^{-6}\,\text{m}^4$$

$$\rho = \frac{70 \times 10^9 2 \times 16.22 \times 10^{-6}}{102 \times 10^3}$$

$$= 113.4\ \text{m}.$$

6-3) أنواع مرتكزات العتبات:

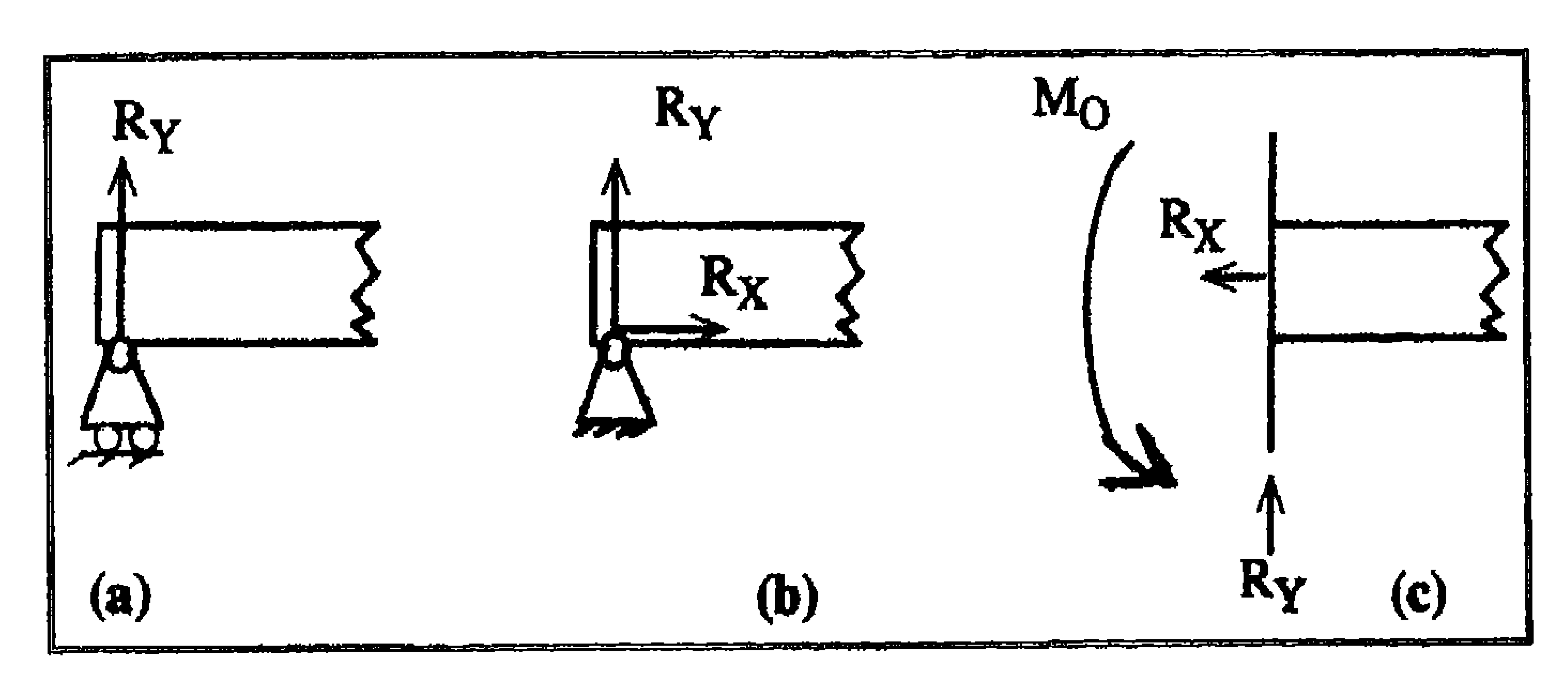
توجد ثلاث أنواع من مرتكزا العتبات التي تعتبر مجموعة مستوية وهي:

1- مرتكز مفصلي متحرك، شكل (6-7-a). إن الارتكاز لا يمنع من دوران نهاية العتبة، وكذلك إزاحتها باتجاه مستوى التدحرج، ويظهر فيها رد فعل واحد،

ويكون عمودياً على مستوى التدحرج ويمر بمركز الدحراج. إن المرتكزات المتحركة تعطي العتبة إمكانية تغير طولها بسهولة عند اختلاف درجات الحرارة، وفي نفس الوقت التخلص من احتمال ظهور الإجهادات الحرارية.

2- مرتكز مفصلي ثابت، شكل (6-7-b). إن مثل هذا الارتكاز يسمح بدوران طرف العتبة ولكن يمنع إزاحتها الانتقالية إلى أية جهة كانت. إن رد الفعل الحاصل فيها يمكن تحليله إلى مركبتين: أفقية وعمودية.

3- التثبيت الصلب التام أو الجاسئ، شكل (6-7-c). إن مثل هذا التثبيت لا يسمح بالإزاحة الخطية والزاوية للمقطع فوق المرتكز، ويوجد لهذا المرتكز رد فعل يتحلل إلى مركبتين: رأسيه وأفقيه، وله رد فعل دوران.

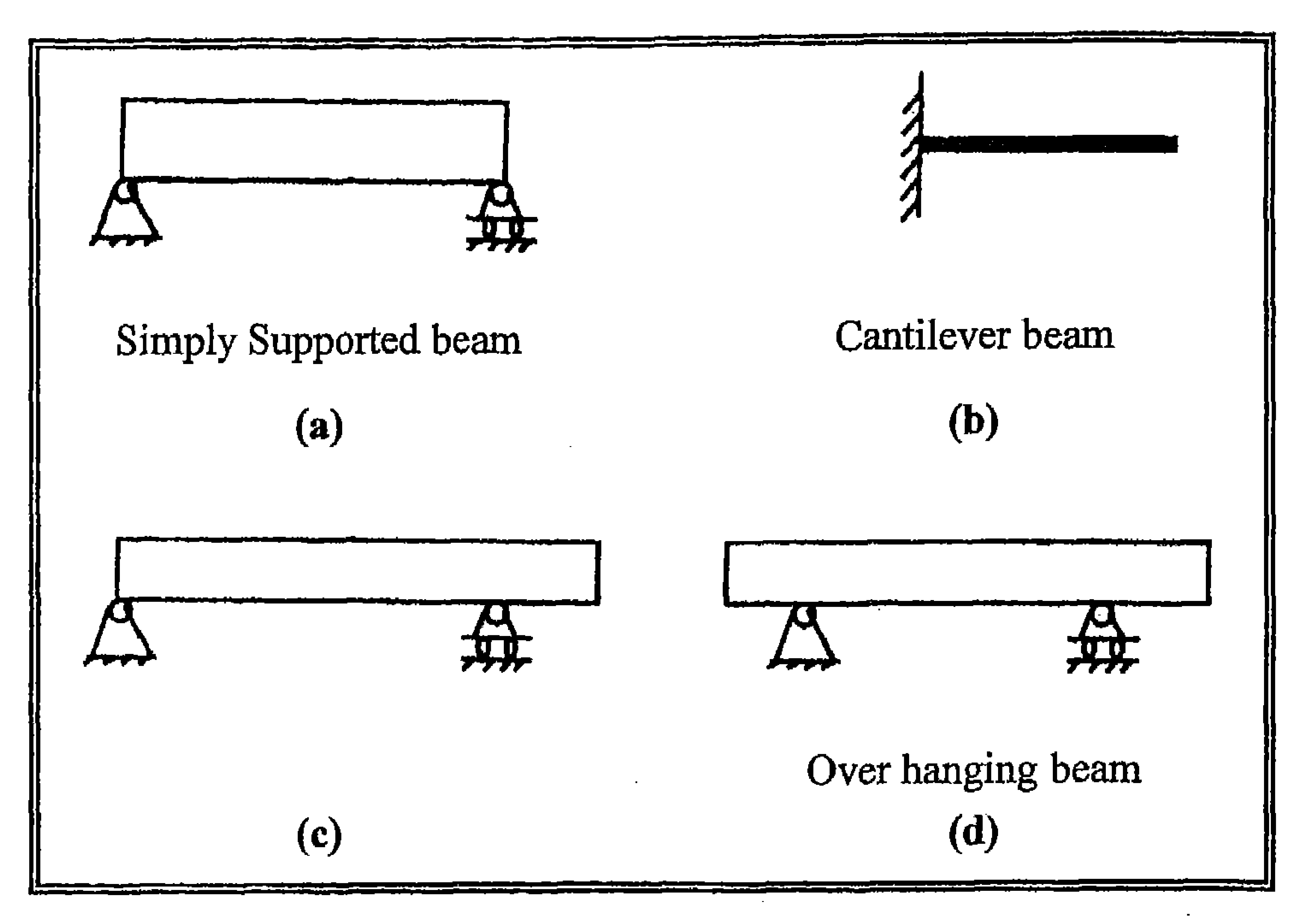


شكل (6-7)

وهناك ثلاث أنواع للعتبات وهي:

1- العتبة البسيطة، شكل (6-8-a)، وهي عبارة عن عتبة مستندة في نهايتها بواسطة ركيزتين مفصليتين أو إحداهما والأخرى متحركة.

2- العتبة الناتئة (البارزة)، شكل (b-8-b)، وهي العتبة المثبتة تثبيت تام من أحد طرفيها.

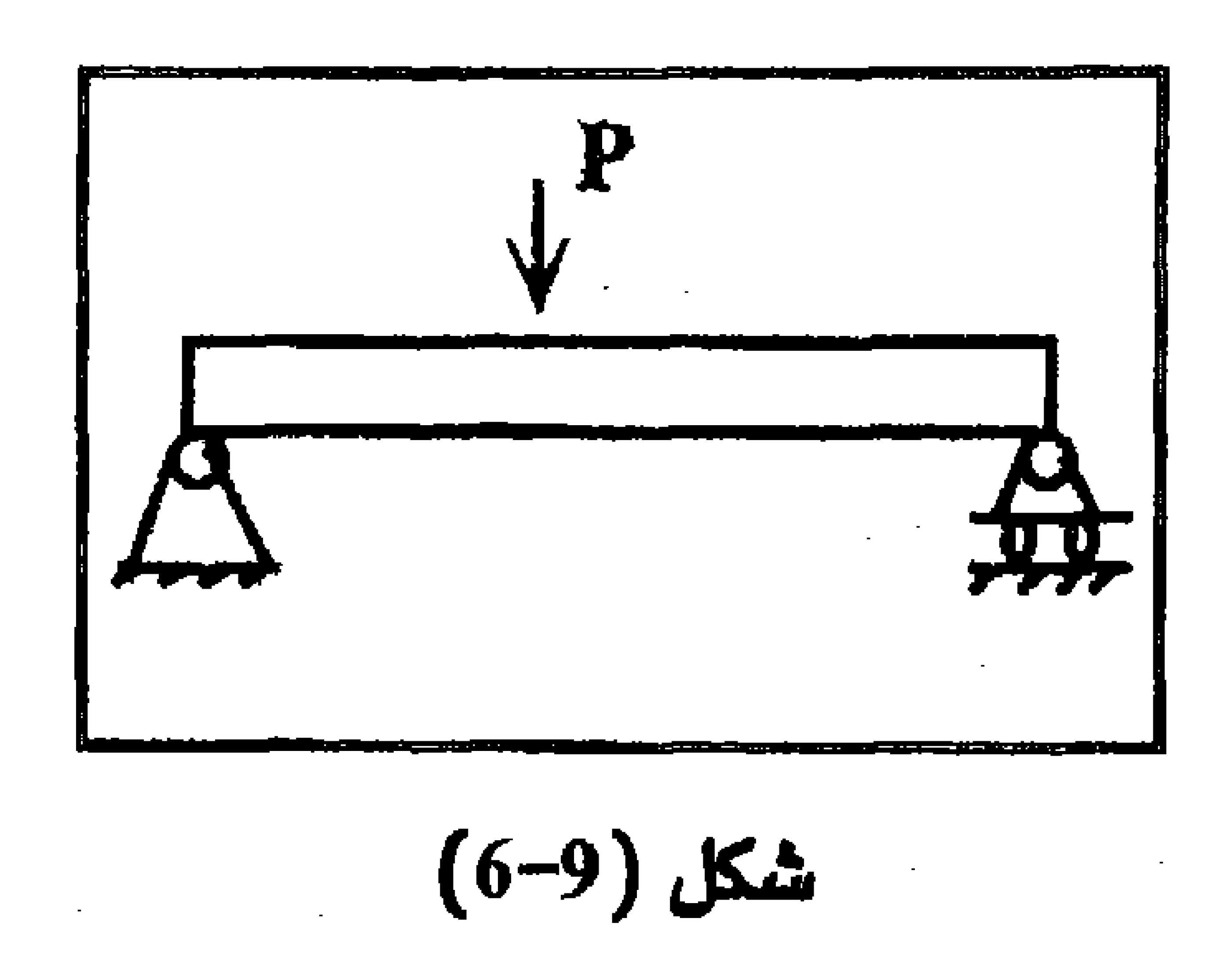


شكل (6-8)

3- العتبة المتدلية، وهي العتبة المرتكزة بحرية عند نقطتين وتمتد أحد نهاياتها (شكل (6-8-c))، أو كلتا النهايتين (شكل (6-8-d)) خلف الركيزتين.

(6-4) أنواع أحمال الانحناء:

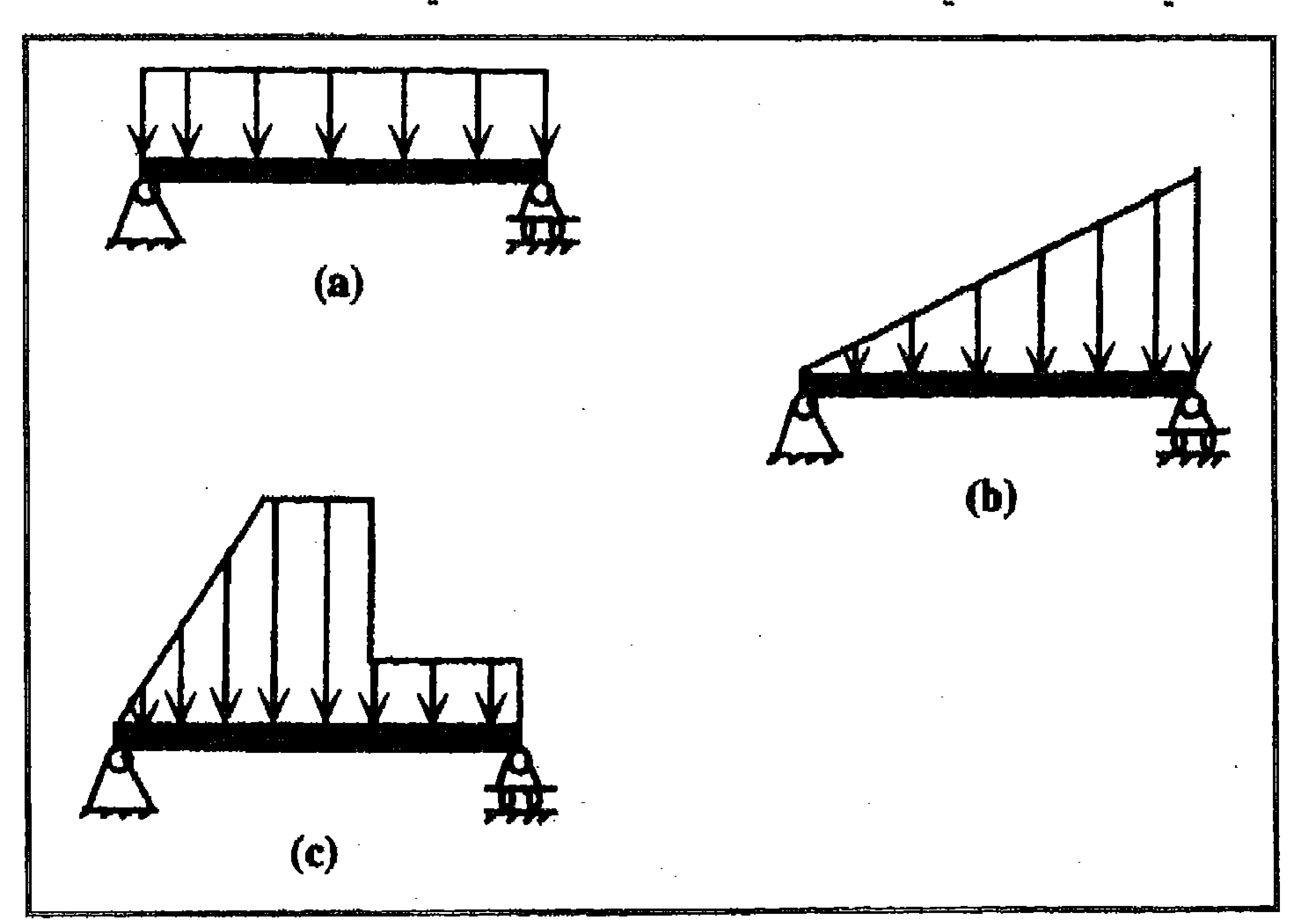
1- قد تكون الأحمال التي تؤثر على العتبات أحمال مركزة، وهي تؤثر عند نقطة معينة وفي اتجاه معلوم، كما في الشكل (6-9).



شكل (6-9)

2- قد تكون هذه الأحمال أيضاً موزعة بانتظام، على شكل مستطيل (شكل (6-10-a) أو حمل موزع متغير بانتظام على شكل مثلث (شكل (6-10-b))، وقد تكون مركبة أي تحوي أكثر من نوع من أنواع الأحمال الموزعة بانتظام أو متغيرة بانتظام شكل (6-10-c) وفي هذه الحالة تقسَّم إلى مناطق معلومة للتمكن من تبسيط هذا الشكل.

وفي حالة هذه الأحمال الموزعة يعبر عن قيمة الحمل كعدد معين من النيوتن لكل متر طولي من العتبة، ومن أجل إيجاد ردود الأفعال فإنه يستعاض مؤقتاً عن هذه القوة الموزعة بقوة مركزة واحدة في منتصف المساحة للمساحة المستطيلة، والثلث من القاعدة للمساحة المثلثة التي تصنعها القوة الموزعة، وتحسب قيمتها العددية من شكل المساحة، فإذا كانت على شكل مستطيل فتحسب المساحة من حاصل ضرب طول العتبة في مقدار القوة المركزة للمتر الطولي، أما إذا كانت على شكل مثلث فتحسب من حاصل ضرب (1/2) في طول العتبة في مقدار القوة الموزعة للمتر الطولي.

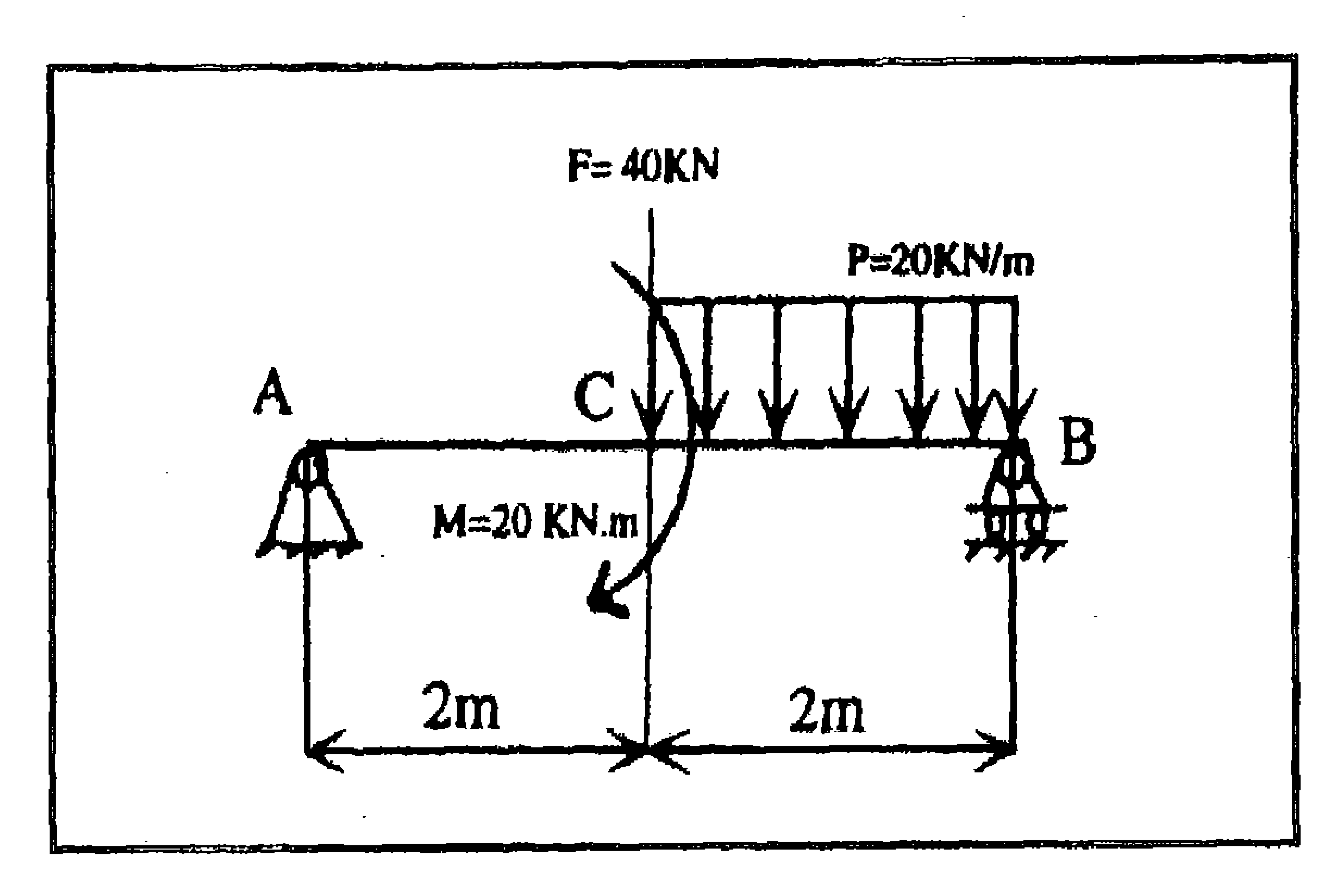


شكل (6-10)

6-5) تحديد ردود الأفعال في المرتكزات:

لتوضيح طريقة حساب ردود الأفعال على المرتكزات نأخذ مثالاً توضيحياً لعملية الحساب هذه:

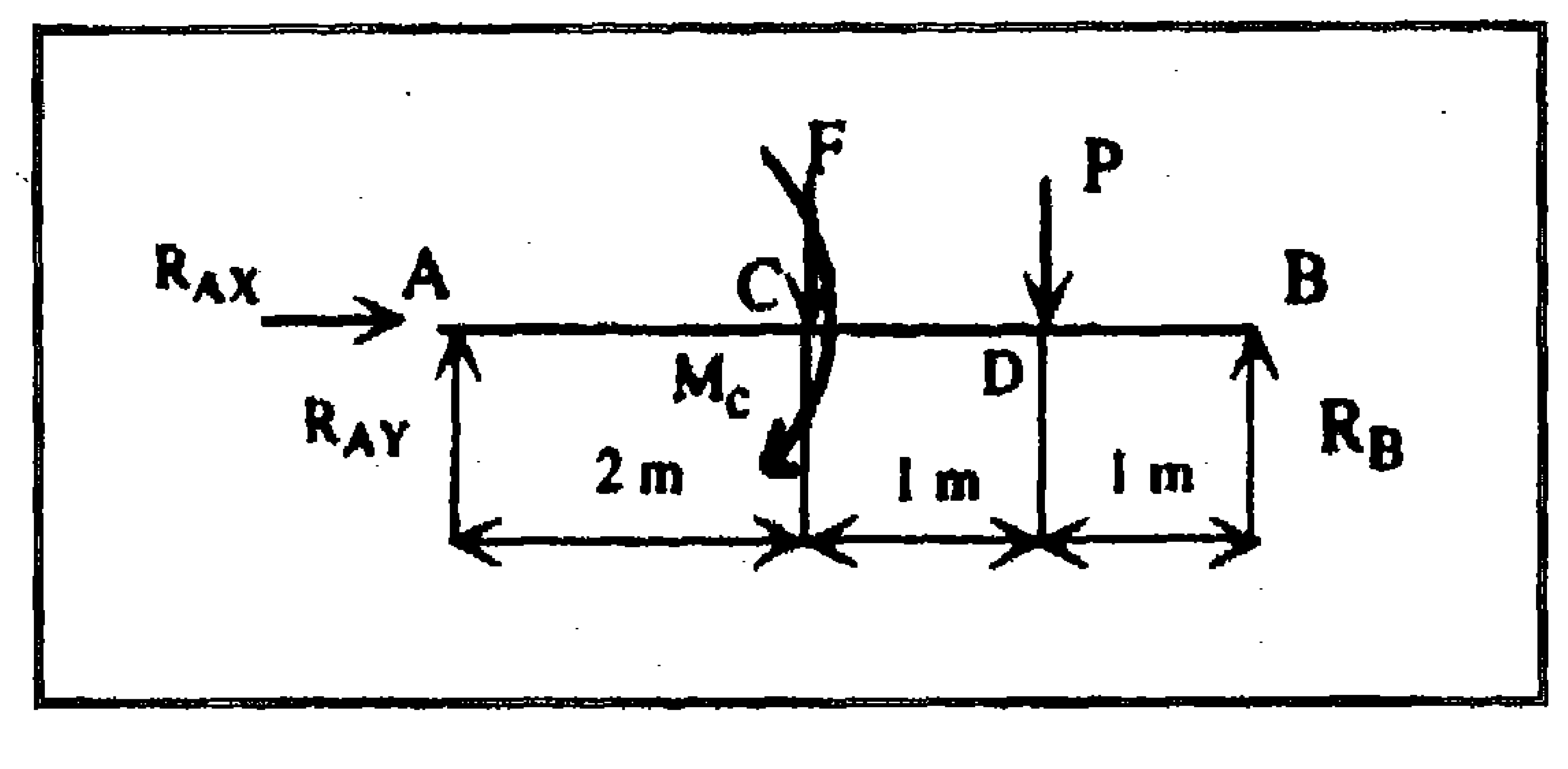
(6.4) يراد تحديد ردود فعل مرتكزي عتبة مرتكزة على طرفيها شكل (6-11-a).



شكل (6-11-a)

الحل:

نقوم أولاً برسم مخطط الجسم الحر شكل (6-11-b).



شكل (6-11-b)

نقوم بحساب القوة الموزعة (P)، ولغرض حساب ردود الأفعال نفرضها مركزة في منتصف المسافة المؤثرة عليها على بعد (1m) من (B) عند النقطة (D).

ويكون مقدارها:

$$P = 20 \times 2 = 40KN.$$

ومن معادلات الاتزان الثلاثة نجد قيمة ردود الأفعال عند المرتكزات (A) و (B).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad R_{AX} = 0 \quad \text{.....(1)}$$

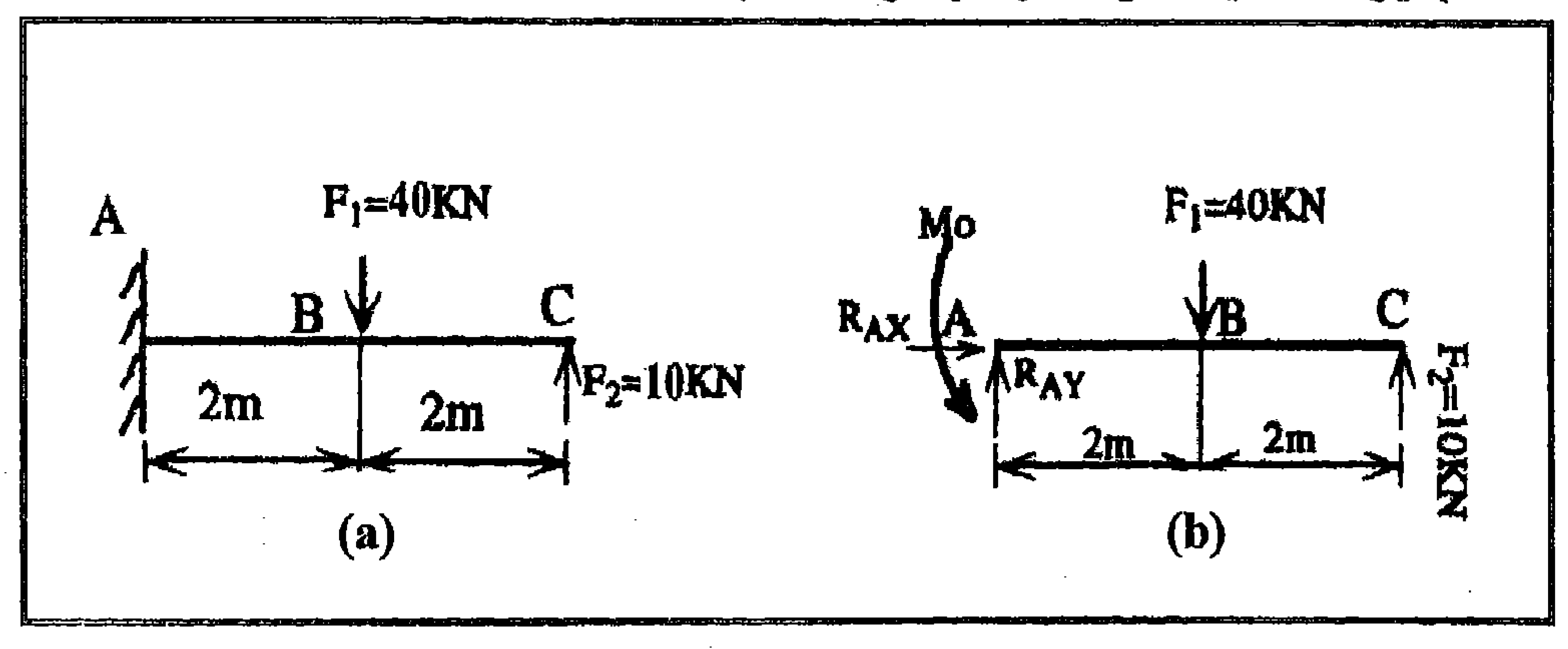
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \ , \quad (-40 \times 2) + (-40 \times 3) + (R_B \times 4) + (-20) = 0$$

$$R_B = (80 + 120 + 20) / 4 = 55KN \quad \text{.....(2)}$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad R_{AY} - 40 - 40 + 44 = 0$$

$$R_{AY} = 40 + 40 - 55 = 25KN \quad \text{.....(3)}$$

6.5) يراد تحديد ردود فعل مرتكزات العتبة الناتئة شكل (6-12-a).



شكل (6-12)

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر شكل (6-12-b). نستخدم بعد ذلك معادلات الاتزان الثلاثة لإيجاد ردود الأفعال للمرتكز الصلب عند (A).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , \; R_{AX} = 0 \; \ldots\ldots (1)$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \; , \quad Mo + (-40 \times 2) + (10 \times 4) = 0$$

$$Mo = 80 - 40 = 40 KN.m \; \ldots\ldots (2)$$

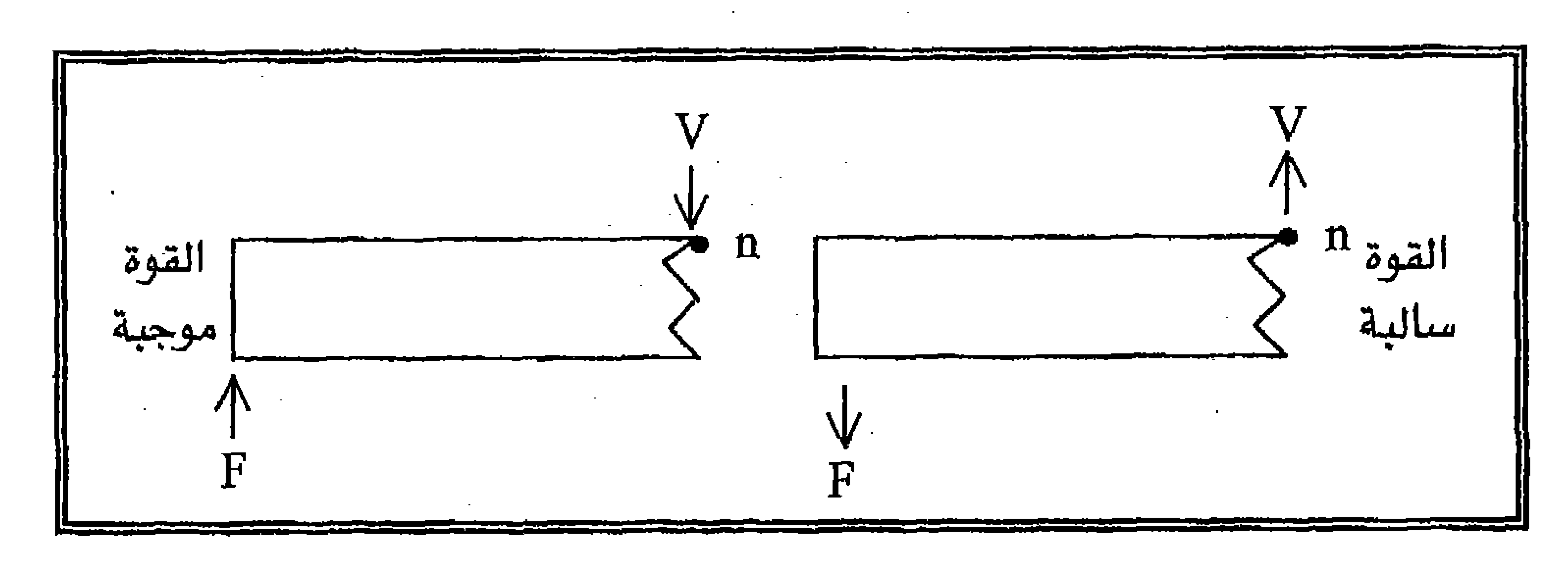
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad R_{AY} - 40 + 10 = 0$$

$$R_{AY} = 40 - 10 = 30 KN \; \ldots\ldots (3)$$

6-6) قاعدة الإشارات لعزوم الانحناء وقوى القص:

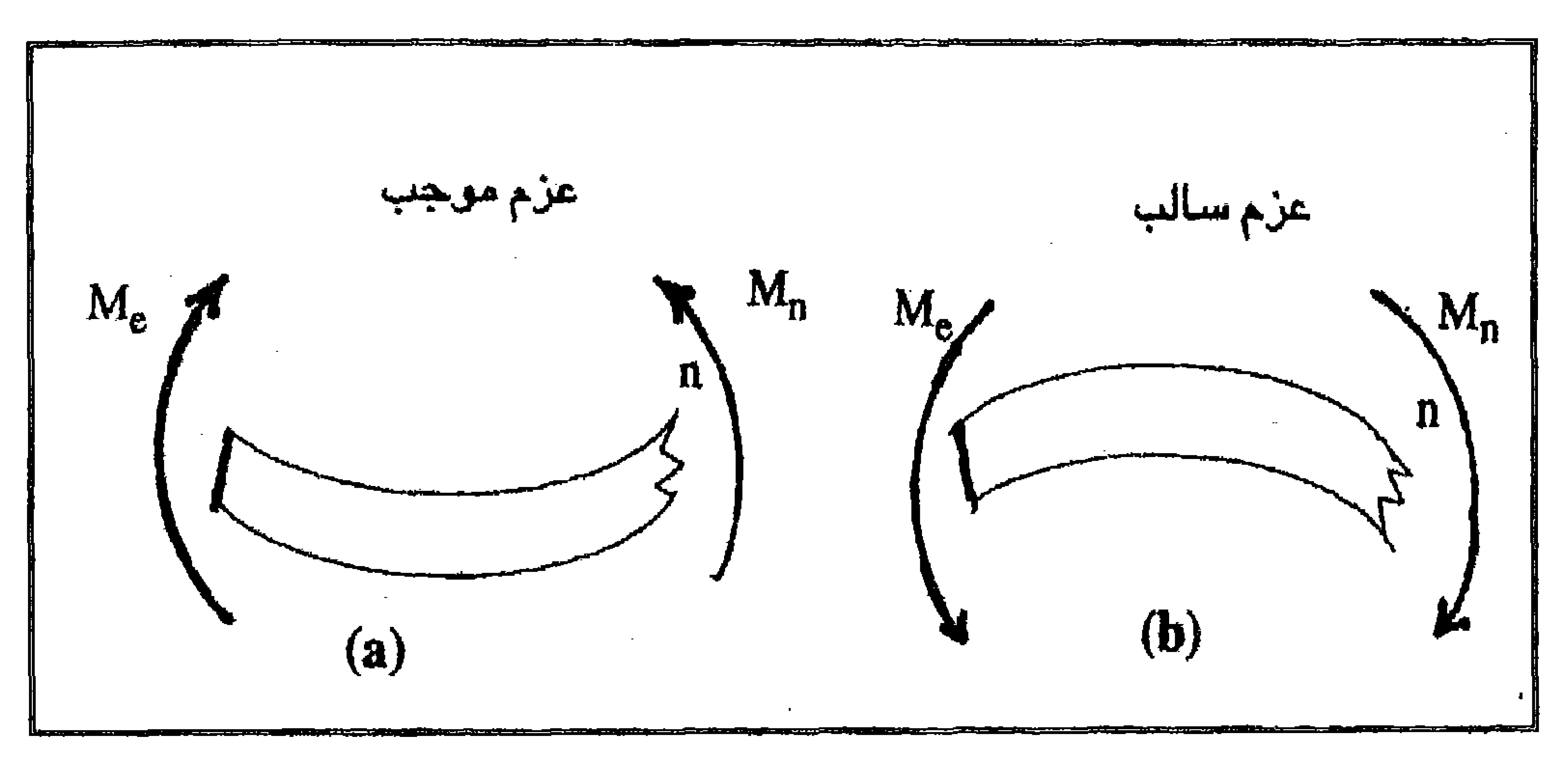
أولاً يجب أخذ القطع على طول العتبة من اليسار إلى اليمين، وهذه الافتراضات التالية لإشارة عزم الانحناء وقوة القص يجب أن تبقى ثابتة لكل مسائل هذه الوحدة.

1- تعتبر القوة العرضية في مقطع العتبة شكل (6-13-a) موجبة، إذا كان اتجاه محصلة القوى الخارجية (F) التي تقع على يسار المقطع من الأسفل إلى الأعلى، وقوة القص المفروضة (V) عند النقطة (n) والتي تقع على يمين المقطع من الأعلى إلى الأسفل. وتعتبر سالبة إذا كان العكس شكل (6-13-b).



شكل (6-13)

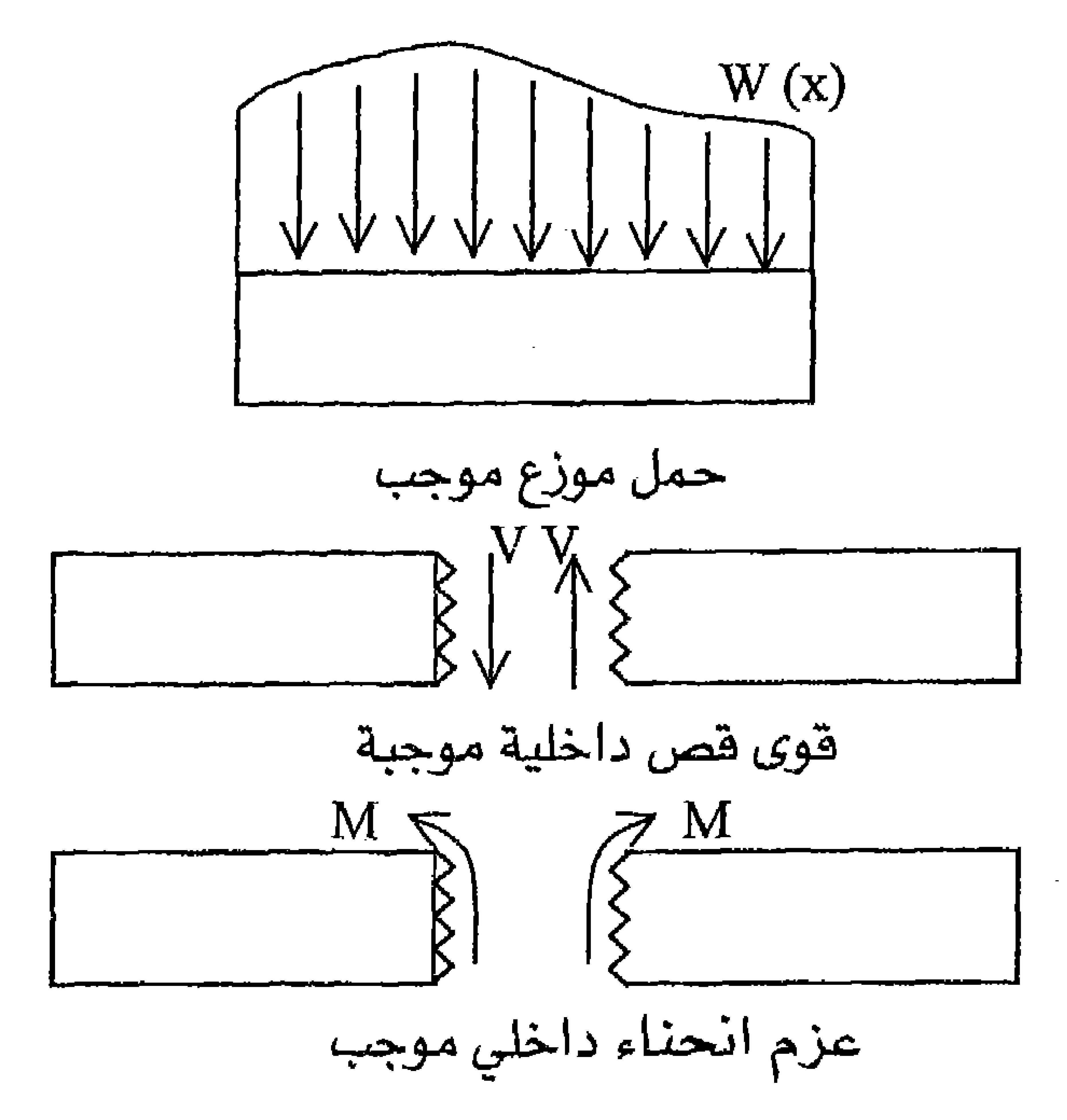
2- يعتبر عزم الانحناء في مقطع العتبة شكل (6-14-a) موجباً، إذا كان الاتجاه محصلة عزم القوى الخارجية (M_e) التي تقع على يسار المقطع باتجاه دوران عقارب الساعة، والعزم المفروض (M_n) لإحداث الاتزان لهذا القطع والذي يقع على يمين المقطع باتجاه مضاد لدوران، عقارب الساعة. ويعتبر العزم سالبا إذا كان عكس ذلك شكل (6-14-b). إن العزوم المبينة في شكل (6-14-a) تحني العتبة بحيث يكون التحدب إلى أسفل، أما العزوم المبينة في الشكل (6-14-b) فإنها تحني العتبة بحيث يكون التحدب إلى أعلى، ومن هنا نستخلص قاعدة أخرى لإشارات عزم الانحناء وهي اعتبار عزم الانحناء موجباً إذا كان مقطع العتبة المبحوث ينحني بتحدث بارز إلى أسفل.



شكل (6-14)

تعتبر العتبات أعضاء طويلة مستقيمة تحمل الأحمال بشكل عمودي على محورها الطولي.

من المهم معرفة التغيّر في قوى القص وعزم الانحناء على طول محورها الطولي من أجل إيجاد النقاط التي تكون عندها القيم القصوى.



خطوات التحليل:

يمكن رسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء باتباع الخطوات التالية:

1- أوجد جميع ردود الفعل والعزوم المؤثرة على العتبات وحلل جميع القوى المؤثرة على العتبات إلى مركبات عمودية وأفقية.

2- تنزل أعمدة من نقاط تأثير القوى والعزوم.

3- نقسم هذه الأعمدة بخطوط أفقية (خطين) أحدهما يمثل خط قوى القص والآخر عزم الانحناء.

4- نمثل على هذا المنحنى جميع القوى المؤثرة على العتبة على منحنى القص وكذلك عزوم الانحناء على منحنى عزم الانحناء.

5- تمثل النقاط التي يكون عندها أقل قوى قص أقصى عزوم انحناء.

6- عند وجود عزم انحناء مع عقارب الساعة فإن هذا العزم يرفع من عزم الانحناء على المنحنى وإذا كان عكس عقارب الساعة فإنه ينزل قيمة العزم على المنحنى.

7- يجب أن يغلق كل من منحنى القص وعزم الانحناء عند نقطة الصفر.

تكون العلاقة بين الحمل الموزع (W) وقوى القص كما يلي:

$$-w(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \text{.......... (6-3)}$$

ميل منحنى (مخطط) قوى القص عند كل نقطة = كثافة الحمل الموزع عند كل نقطة.

أمّا العلاقة بين قوى القص وعزم الانحناء تكون كما يلي:

$$V = \frac{dM}{dx} \quad \text{.......... (6-4)}$$

ميل مخطط عزم الانحناء عند كل نقطة = قوى القص عند كل نقطة.

وبالتالي يمكن إيجاد قوة القص عند نقطة معينة كما يلي:

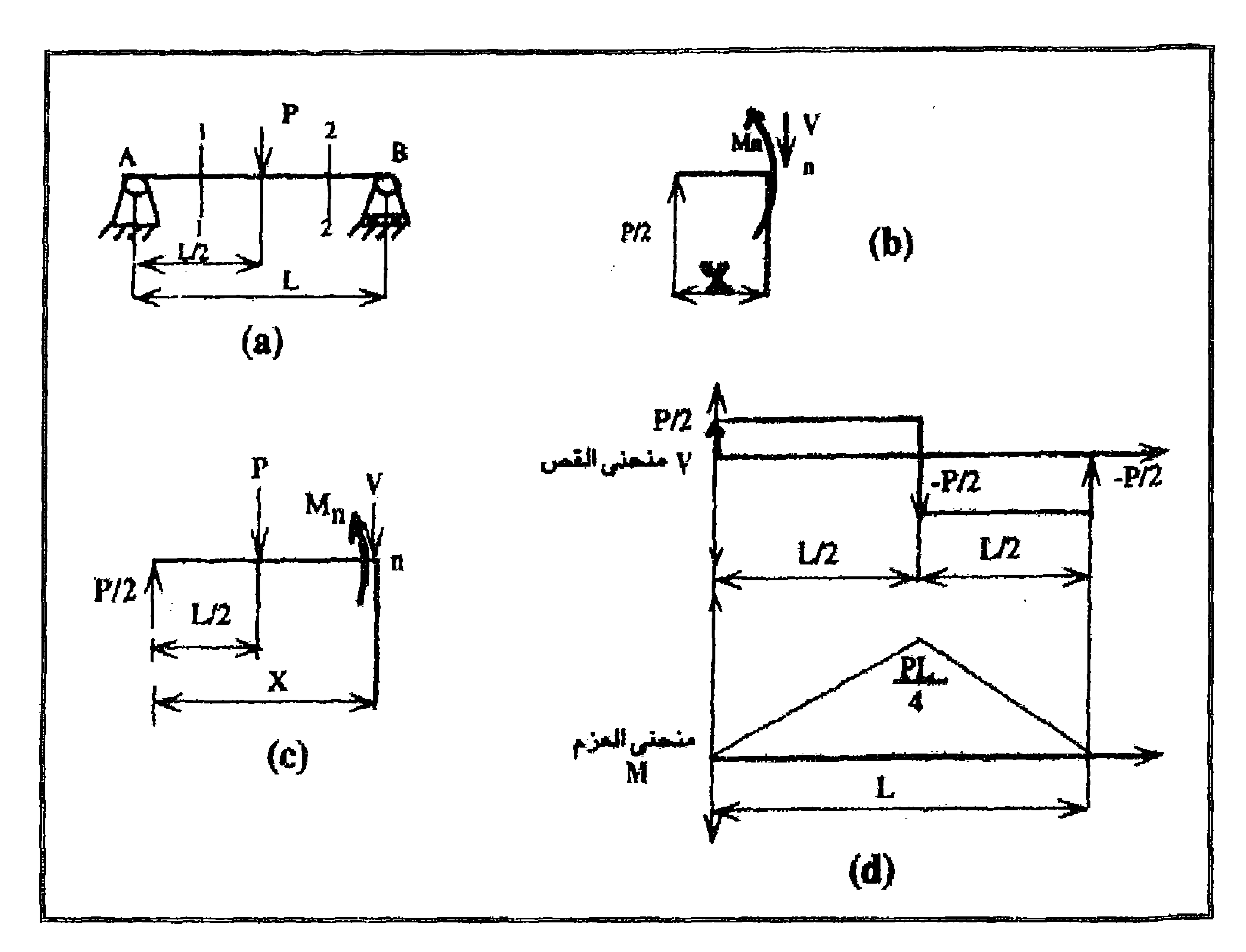
$$V = \int_{0}^{x} -w(x)\, dx \quad \text{.......... (6-5)}$$

ويمكن إيجاد العزم عند نقطة معينة بمعرفة قوى القص كما يلي:

$$M = \int_{0}^{x} V dx \quad \text{.......... (6-6)}$$

أمثلة محلولة:

(6-6) ارسم منحنى القص والعزم للعتبة والموضوعة في الشكل (15-6).



شكل (6-15)

الحل:

نــأخذ القطــع (1-1) شــكل (6-15-b) عنــد النقطــة (n) حيــث $\left(O < X < \frac{L}{2}\right)$ وبحساب ردود الأفعال عند المرتـزات تكـون قيمتـها عنـد (A) مساوية ($R_A = P/2$) وتكون قيمتها عند (B) مساوية ($R_B = P/2$) وذلك لوجود القوة (P) في المنتصف، ويكون اتجاه كل منهما إلى الأعلى، وحتى يحدث الاتزان في المقطع (1-1) يجب أن توضع قوة القص (V) عند (n) إلى أسفل، وتمثل القوتان (V) و (P/2) عزم ازدواج مع عقارب الساعة فتضع عزم ازدواج آخر

(M_n) للحفاظ على الاتزان، وتحسب معادلات كل من قوة القص وعزم الانحناء على الشكل التالي:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \; P/2 - V = 0 \rightarrow V = P/2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_n = 0 \; , \quad M_n - (P/2 \times X) = 0 \rightarrow M_n = \frac{PX}{2} \; \ldots\ldots\ldots (2)$$

ويأخذ المقطع (2−2) شكل (6-15-c) حيث أن $\left(\frac{1}{2} < X < L\right)$.

فتكون معادلتين القص والعزم في هذا المقطع هي:

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad (P/2) - P - V = 0 \rightarrow V = \overline{P}/2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_n = 0 \; , \quad M_n + P\left(X - \frac{L}{2}\right) - \left(\frac{P}{2} \times X\right) = 0$$

$$M_n + PX - \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2} = 0$$

$$M_n + \frac{PX}{2} - \frac{PL}{2} = 0$$

$$M_n = \frac{PL}{2} - \frac{PX}{2} = \frac{P}{2}(L - X) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

والآن نقوم برسم خطين من أجل تعيين منحنيات القص والعزم لنفس الطول (L) كما هو موضح بالشكل (6-15-d).

نلاحظ أنه في منحنى القص عند الطول صفر للعتبة فإن إجهاد القص يساوي $\left(\frac{P}{2}\right)$، وهذا يتحقق في المعادلة رقم (1) وأما المعادلة رقم (3) فإن قيمته أيضاً $\left(\frac{P}{2}\right)$ ولكن بالاتجاه السالب حيث الطول يكون مساوياً $\left(\frac{L}{2}\right)$ أو مساوياً (L).

أما في العزم فإنه عند طول للعتبة مساوياً للصفر ومن المعادلة رقم (2) يكون العزم مساوياً للصفر حيث أن $(X = 0)$.لكن عند التعويض بقيمة (X) في المعادلة رقم (4) لطول $\left(\frac{L}{2}\right)$ فإن العزم يكون:

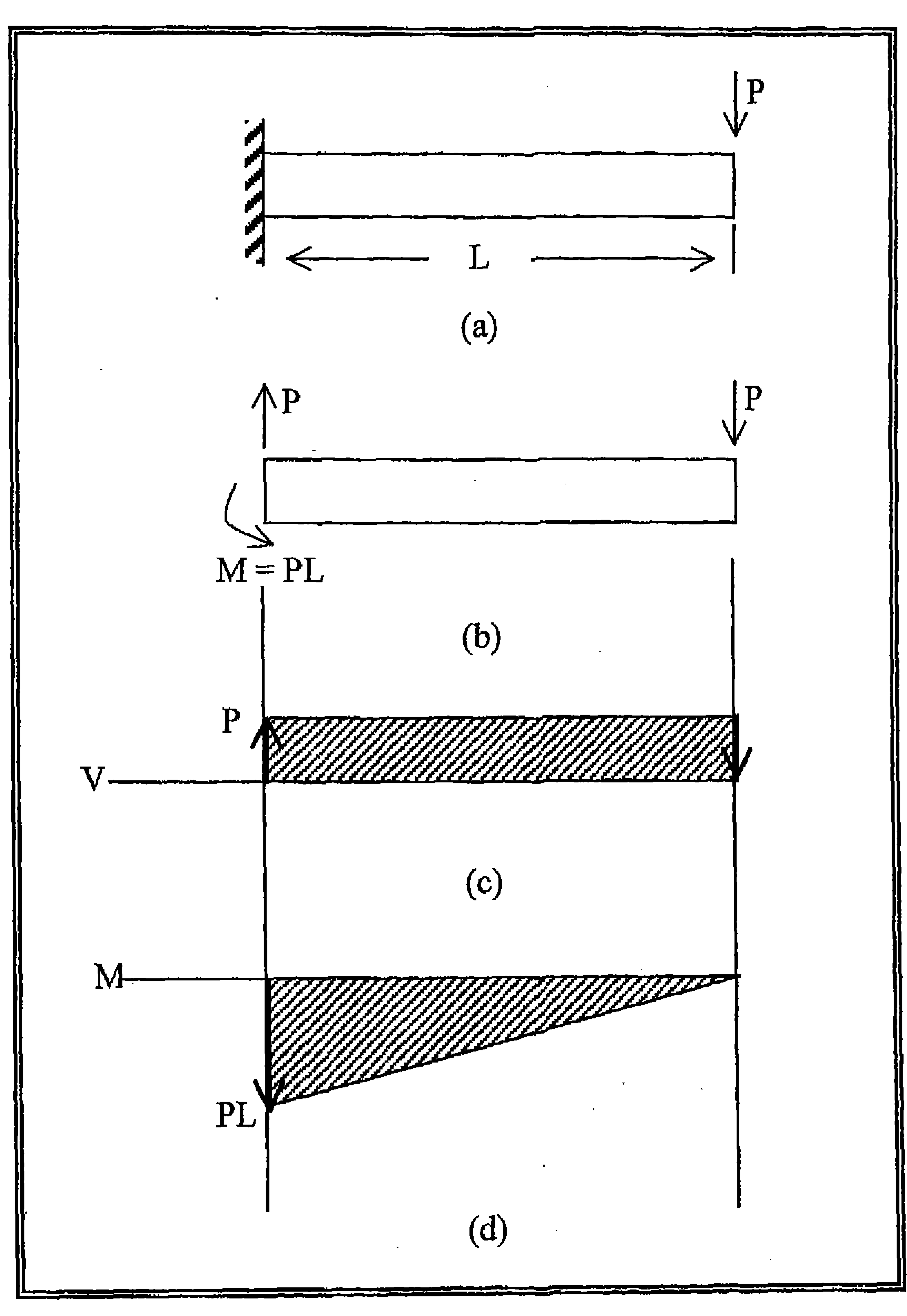
$$M = \frac{P}{2}(L - X) = \frac{P}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{4}$$

وهذه القيمة أكبر قيمة للعزم، ولكن عند طول (L) فإن العزم يكون:

$$M = \frac{P}{2}(L - X) = \frac{P}{2}(L - L) = 0$$

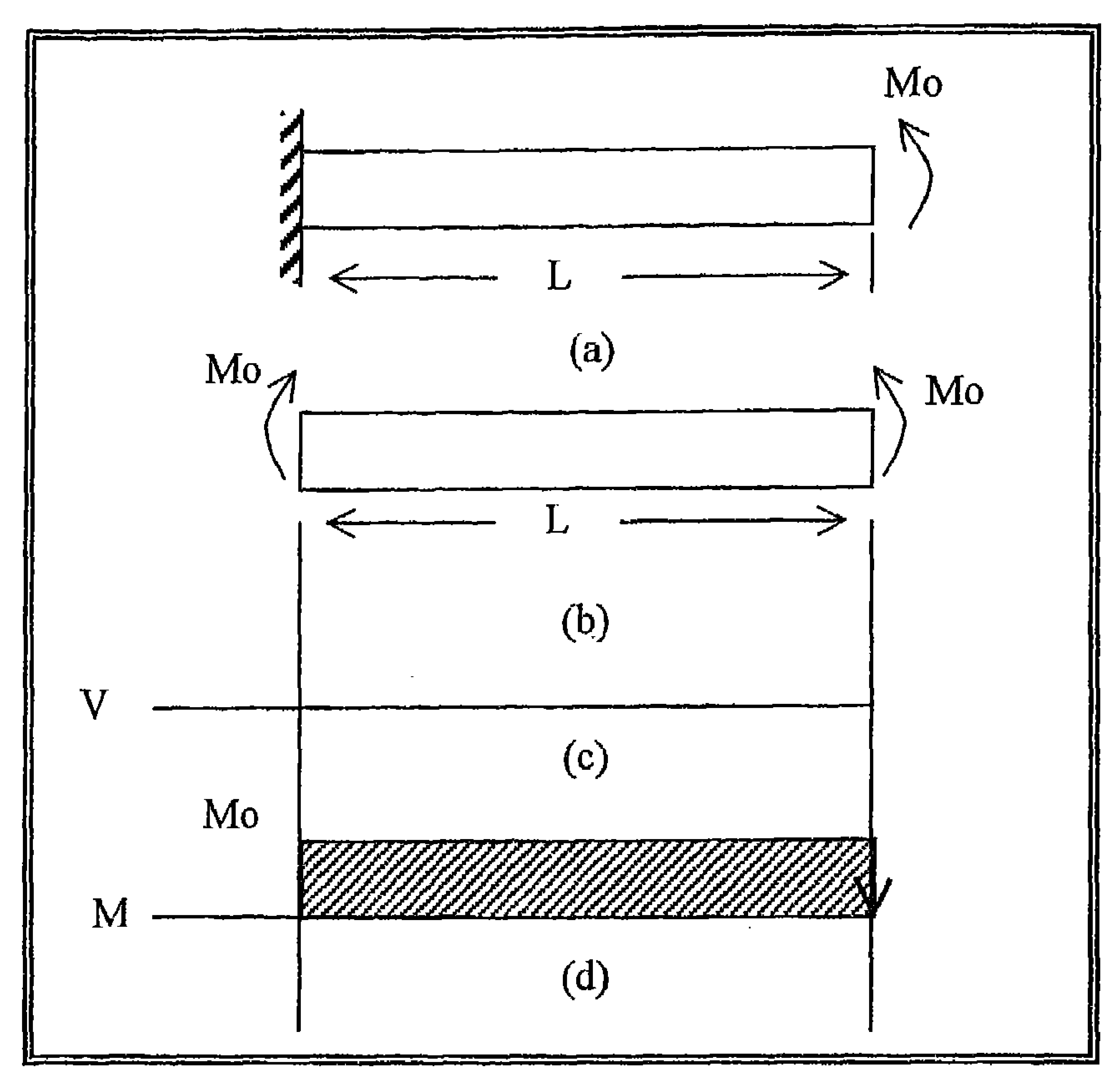
للتأكد من صحة المنحنيات فإنها يجب أن تغلق حيث أن منحنى العزم والقص يجب أن ينتهيا مغلقين والطريقة الأخرى للتأكد من صحة المنحنيات وهو أنه المساحة تحت منحنى القص عند أي نقطة (فترة) يساوي العزم عند تلك النقطة، فمثلاً عند $\left(\frac{L}{2}\right)$ على منحنى القص فإن المساحة تساوي حاصل ضرب الطول بالعرض، وهي $\left(\frac{P}{2} \times \frac{L}{2}\right)$ ويكون الناتج هو $\left(\frac{PL}{4}\right)$، وهو قيمة العزم عند تلك القيمة وهي $\left(\frac{L}{2}\right)$.

(6-7) ارسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء للعتبة التالية:



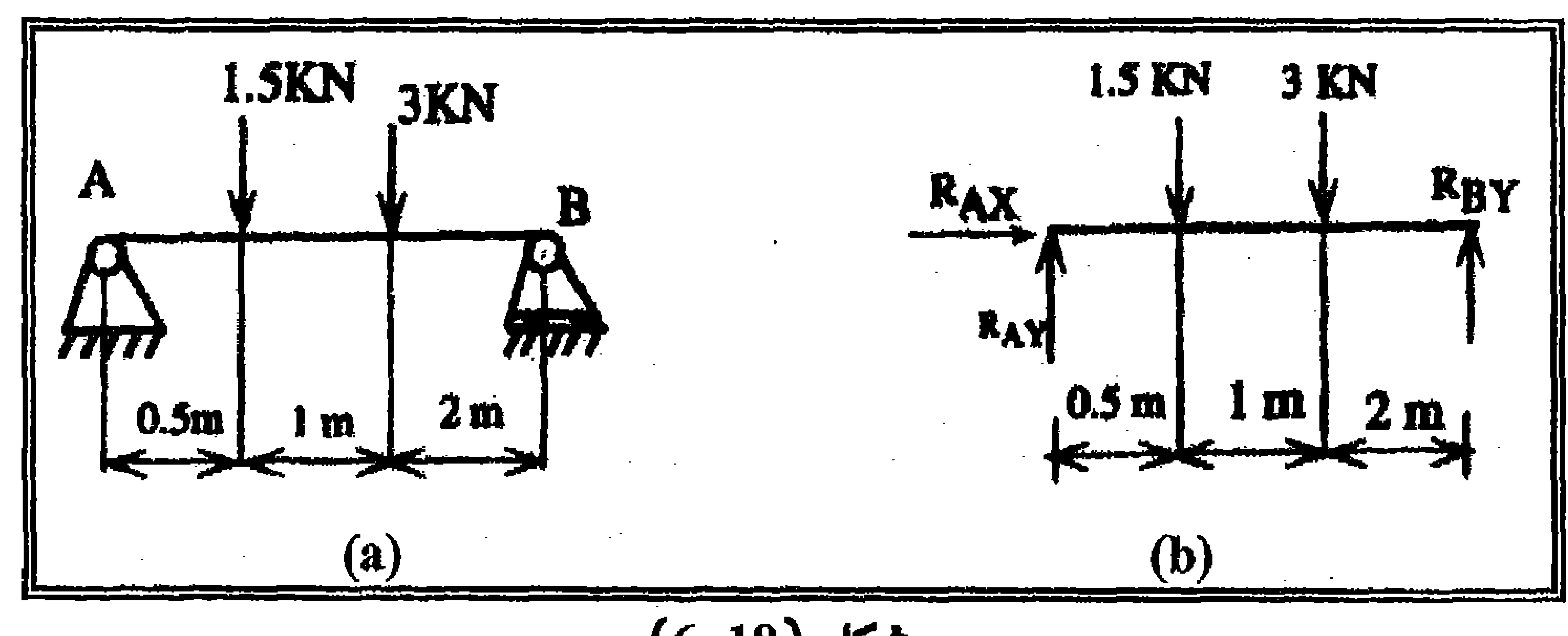
شكل (6-16)

(6-8) ارسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء في العتبة التالية:



شكل (6-17)

(6-9) ارسم مخطط القص والعزم للعتبة المبينة في الشكل (6-18).



شكل (6-18)

الحل:

نحسب ردود الأفعال عند (A) و (B).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , \; R_{AX} = 0$$

$$\circlearrowleft + \; \sum M_B = 0 \; , \; (-R_{AY} \times 3.5) + (1.5 \times 3) + (3 \times 2) = 0$$

$$R_{AY} = 3KN$$

$$+\uparrow \; \sum F_Y = 0 \quad , \; R_{AX} - 1.5 - 3 + R_{BY} = 0$$

$$R_{BY} = 1.5 + 3 - 3 = 1.5KN$$

والآن نقوم بعمليات القطع من أجل تحليل قوى القص وعزوم الانحناء.

شكل (6-19-a) For $0 < X < 0.5$.

$$+\uparrow \; \sum F_Y = 0 \quad , \; 3 - V = 0 \rightarrow V = 3KN \; \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\circlearrowleft + \; \sum M_n = 0 \; , \; M_n - 3X = 0 \rightarrow M_n = 3X \; \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

شكل (6-12-b) For $0.5 < X < 1.5$

$$+\uparrow \; \sum F_Y = 0 \quad , \; 3 - 1.5 - V = 0 \rightarrow V = 1.5KN \; \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\circlearrowleft + \; \sum M_n = 0 \; , \; 3X - 1.5\,(X - 0.5) - M_n = 0$$

$$M_n = 3X - 1.5\,(X - 0.5) = 1.5x + 0.75 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

شكل (6-19-c) For $1.5 < X < 3.5$

$$+\uparrow \; \sum F_Y = 0 \quad , \; 3 - 3 - 1.5 - V = 0 \rightarrow V = -1.5KN \; \ldots\ldots (5)$$

$$\circlearrowleft + \; \sum M_n = 0 \; , \; 3X - 1.5\,(X - 0.5) - (X - 1.5) + M_n = 0$$

$$M_n = 5.25 - 1.5X \; \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

نقوم الآن بالتعويض بقيمة (X) من أجل إيجاد العزم عند أبعاد محددة (مناطق القطع)، فإذا كانت (X) عند أطراف الفترة فيمكن تعويضها في معادلة العزم للفترة السابقة لـ (X) أو الفترة التي تليها. كما أنه عند أخذ العزوم فإننا نأخذها حول نقطة القطع، ثم نرسم بعد ذلك محنى القص والعزم شكل (6-19-d).

at $X = 0\ m \rightarrow V = 3\ KN$

$$M_n = 3 \times 0 = 0 \text{ KN.m}$$

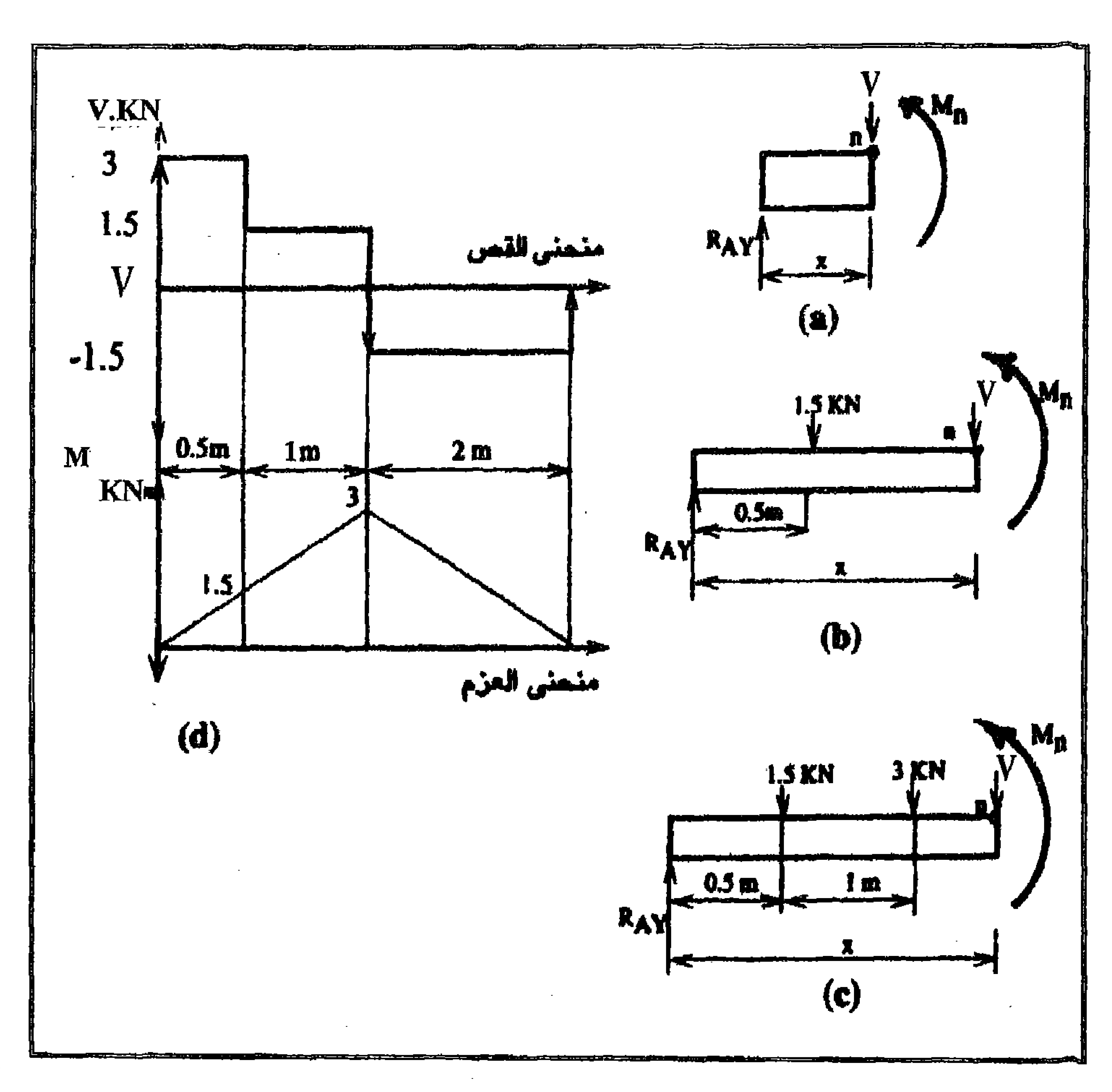
at $X = 0.5$ m $\rightarrow V = 1.5$ KN

$$M_n = 3 \times 0.5 = 1.5 \text{ KN.m}$$

OR: $$M_n = (3 \times 0.5) - 1.5\,(0.5 - 0.5) = 1.5 \text{ KN.m}$$

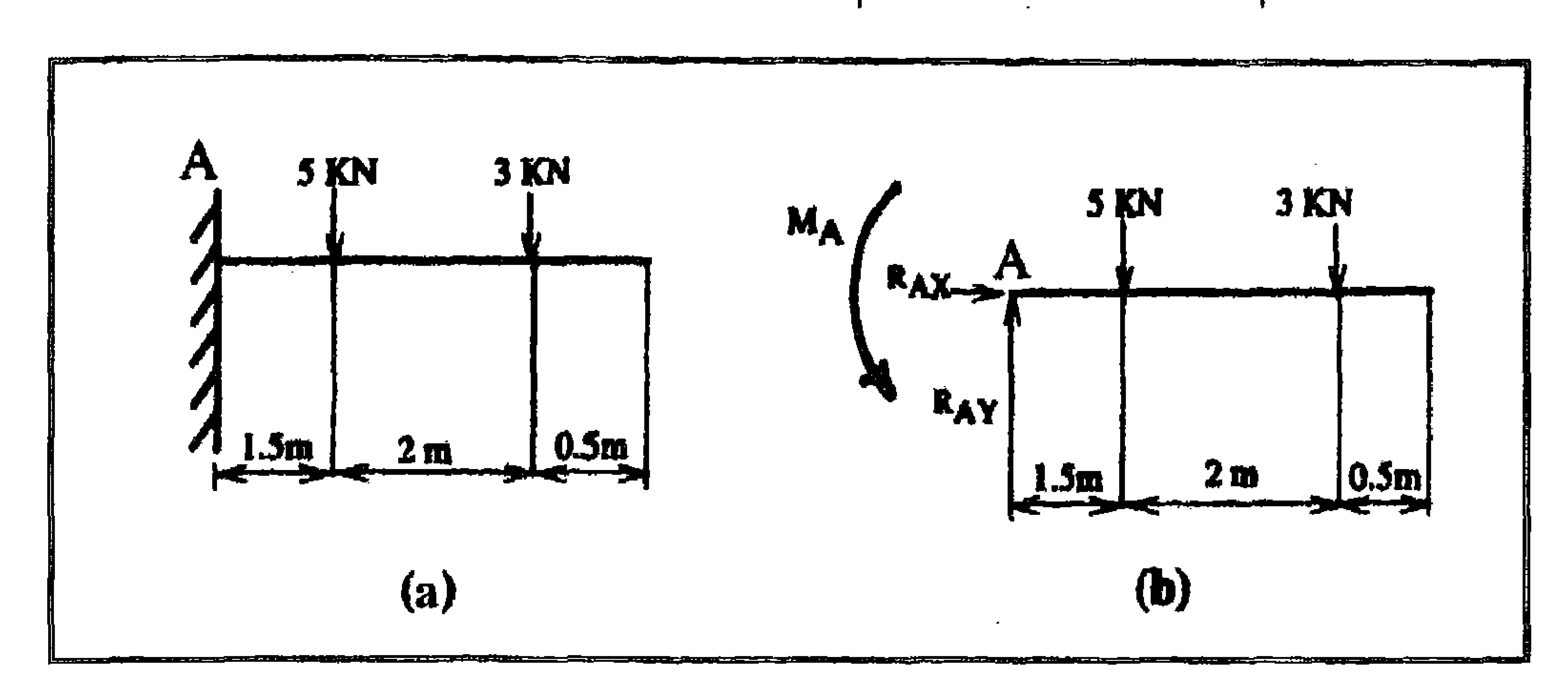
at $X = 1.5$ m $\rightarrow V = -1.5$ KN

$$M_n = (3 \times 1.5) - 1.5\,(1.5 - 0.5) = 3 \text{ KN.m}$$



شكل (6-19)

(6.10) ارسم مخطط القص والعزم للعتبة الناتئة شكل (6-20-a).



شكل (6-20)

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحر شكل (6-13-b) ويحدد رد الأفعال عند (A):

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , \ R_{AX} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \ R_{AY} = 5 - 3 = 0 \ \rightarrow R_{AY} = 8KN$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 \ , \ M_A + (-5 \times 1.5) + (-3 \times 3.5) = 0 \rightarrow M_A = 18KN.m$$

شكل (6-21-a) For $0 < X < 1.5$.

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \ 8 - V = 0 \ \rightarrow V = 8KN \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_n = 0, M_n - 8X + 18 = 0 \Rightarrow M_n = 8X - 18 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

شكل (6-21-b) For $1.5 < X < 3.5$.

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \ 8 - 5 - V = 0 \ \rightarrow V = 3KN \ \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\curvearrowleft + \sum M_n = 0, \ M_n - 8X + 18 + 5(X - 1.5) = 0 \rightarrow M_n = 3X - 10.5 \ .(4)$$

شكل (6-21-c) For $3.5 < X < 4$.

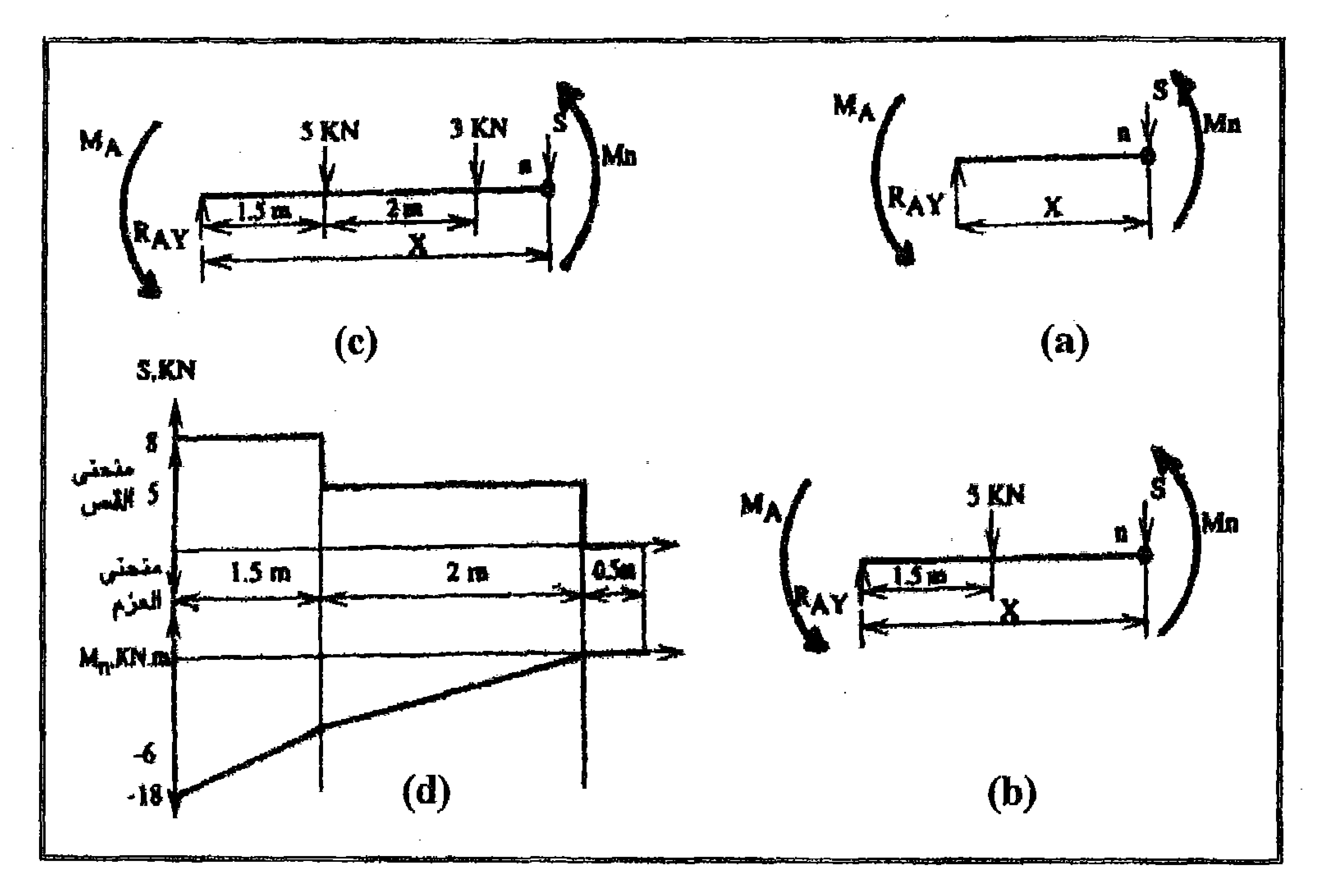
$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \ 8 - 5 - 3 - V = 0 \ \rightarrow V = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\sum M_n = 0,\ M_n + 3(X-3.5) + 5(X-1.5) + 18 - 8X = 0$$

$$M_n = -3X + 10.5 - 5X + 7.5 - 18 + 8X$$

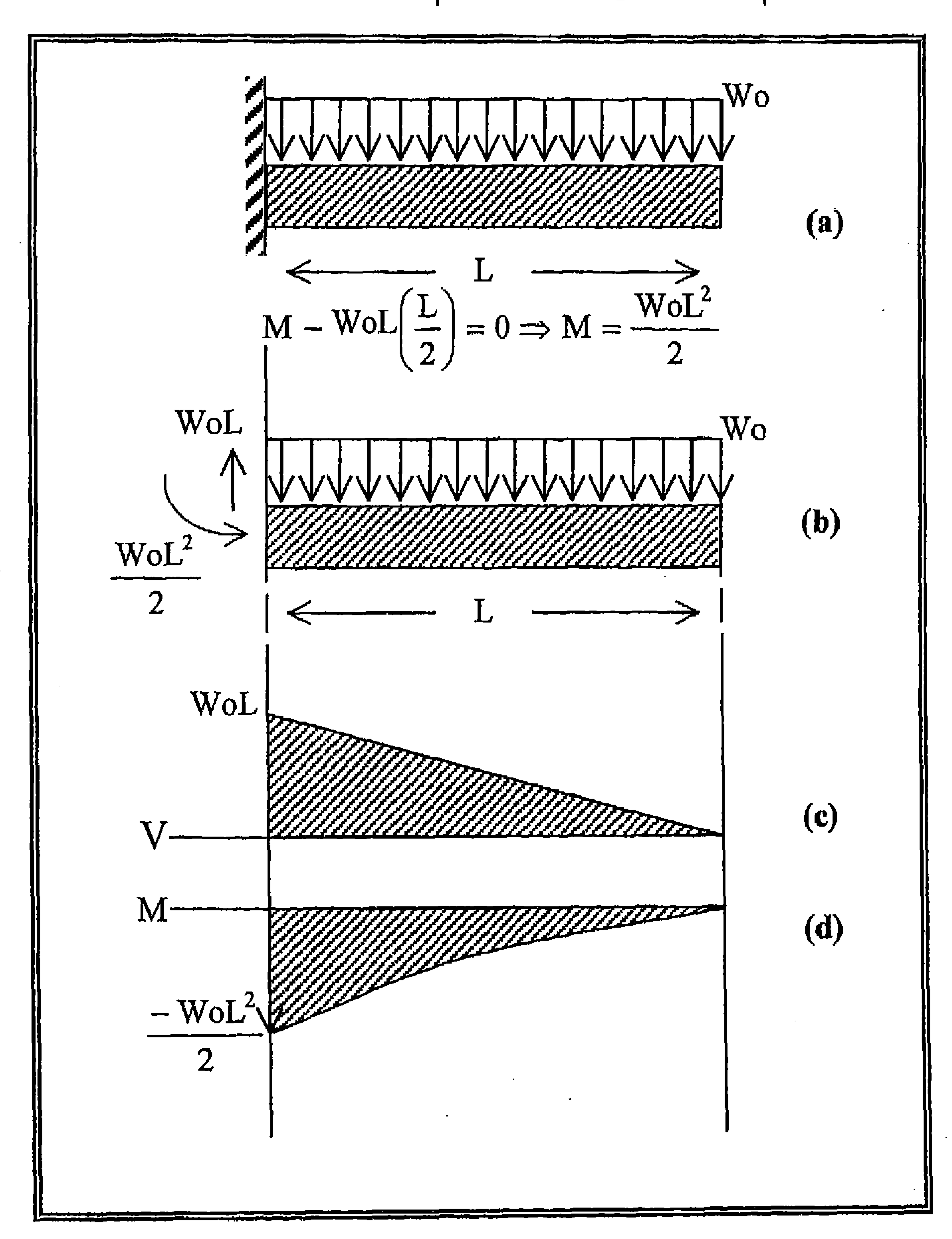
$$M_n = 0 \quad \text{...} (6)$$

نرسم الآن منحنى القص والعزم، شكل (6-21-d):



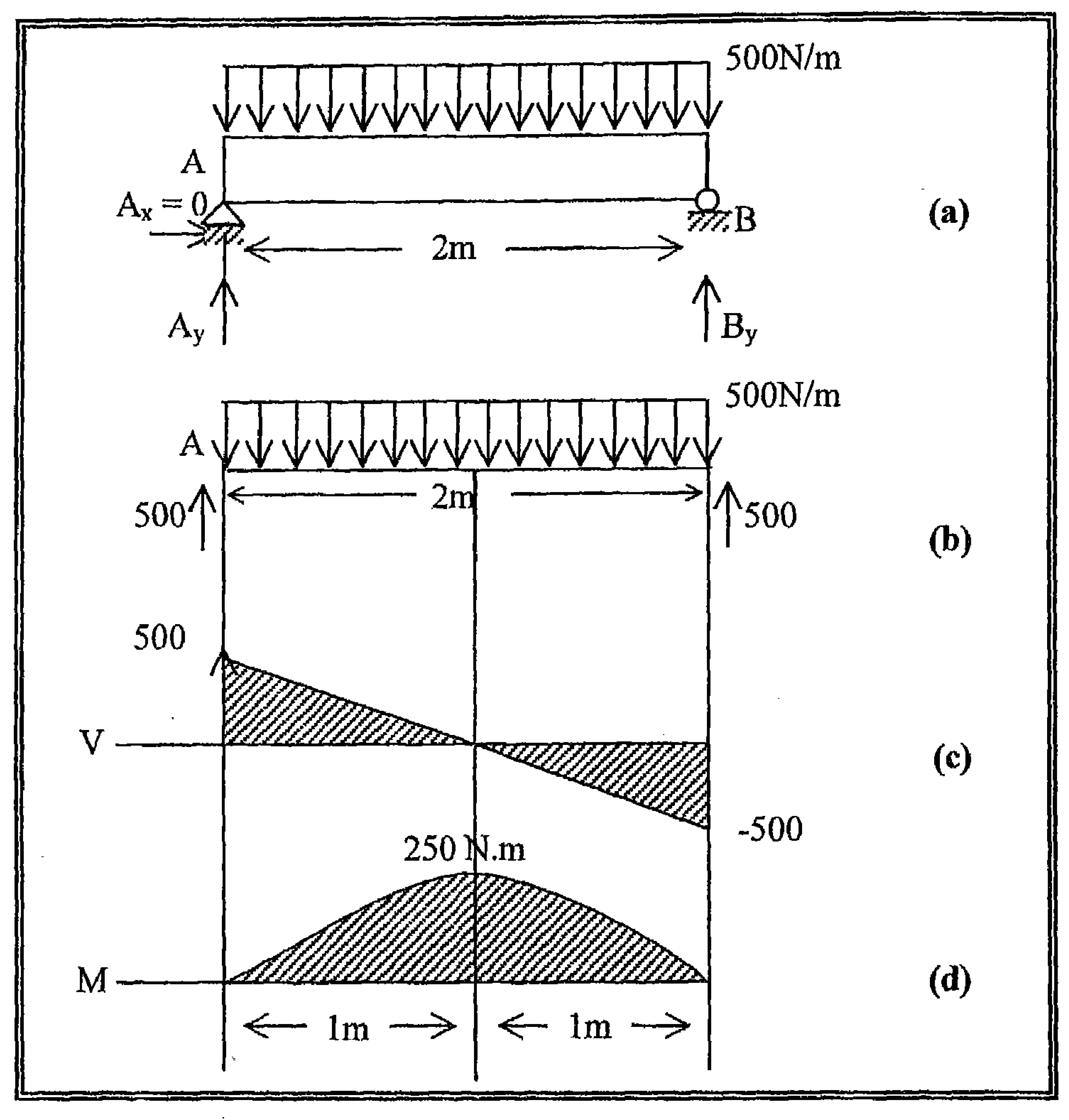
شكل (6-21)

(6.11) ارسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء للعتبة التالية:



شكل (6-22)

(6.12) ارسم مخطط قوى القص وعزم الانحناء للعتبة التالية:



شكل (6-23)

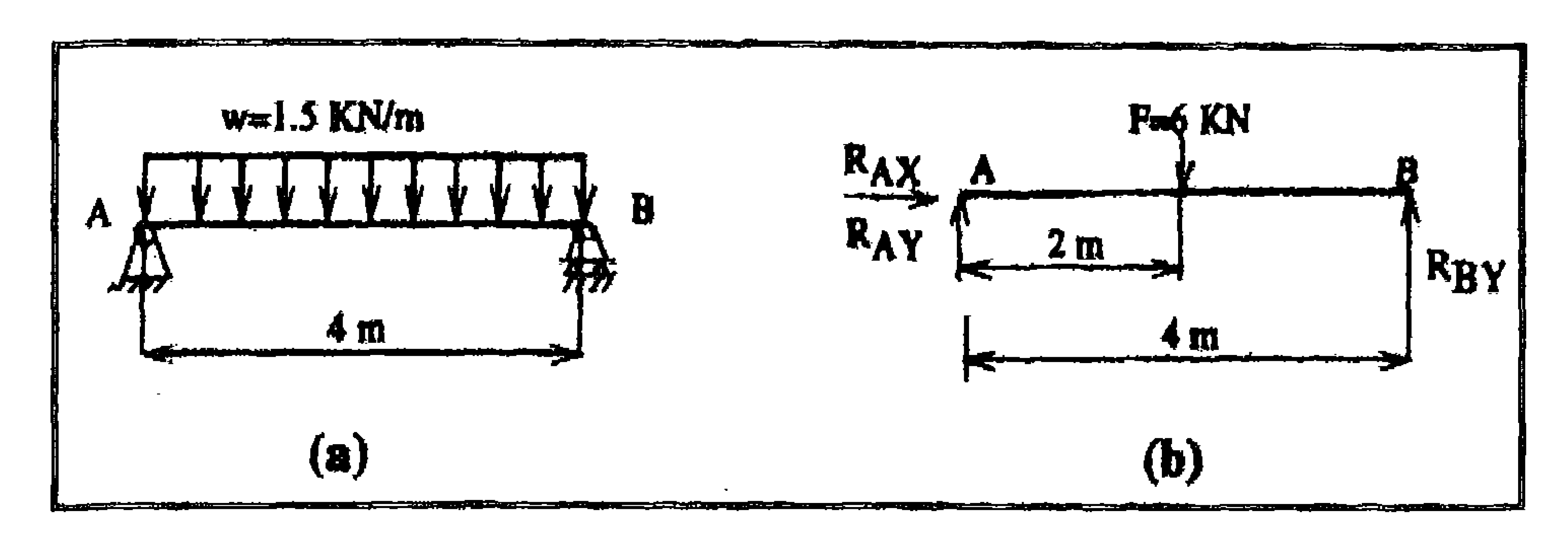
$$\sum M_A = 0 = -1000 \times 1 + 2By = 0$$

$$By = 500N$$

$$\sum F_y = 0 = Ay - 1000 + 500 = 0$$

$$A_y = 500\,N$$

(6.13) في الشكل (6-24-a) أوجد مخطط القص والعزم لهذه العتبة.



شكل (6-24)

الحل:

نرسم مخطط الجسم الحرة شكل (6-24-b) ولإيجاد ردود الأفعال عند (A) و (B) نفرض القوة الموزعة مركزة في المنتصف ويكون مقدارها:

$$F = 1.5 \times 4 = 6\ KN$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , R_{AX} = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0 \ , \ (-6 \times 2) + (R_{BY} \times 4) = 0$$

$$R_{BY} = 3KN$$

$$+\uparrow \ \sum_{FY} = 0 \quad , R_{AY} + R_{BY} - 6 = 0$$

$$R_{AY} + 3 = 0 \rightarrow R_{AY} = 3KN$$

For $0 < X < 2$ (6-25-a) شكل

نلاحظ أن جميع القوى على طول هذا القطع يكون مساوياً (1.5 X).

$$+\uparrow \ \sum F_Y = 0 \quad , 3 - 1.5X - V = 0 \rightarrow V = 3 - 1.5X \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\circlearrowleft + \sum M_n = 0 \ , \ M_n + \left(1.5 \times \left(\frac{X}{2}\right)\right) - 3X = 0 \rightarrow M_n = 3X - 1.5\frac{X^2}{2} \ \ldots\ldots (2)$$

نلاحظ أنه عندما أخذنا العزم للقوة (1.5 X) والموزعة على طول العتبة فإننا اعتبرنا ذراع العزم هو $\left(\frac{X}{2}\right)$ لأننا عوضنا عن القوة (1.5X) بقوة مركزة في منتصف هذا الجزء من القطع أي منتصف الطول (X). وبما أن معادلة العزم رقم (2) من الدرجة الثانية إذاً لابد أن يكون منحنى العزم منحنياً.

at X = 0 m → V = 3 KN

M_n = 0 KN.m

at X = 0 m → V = 3 KN

M_n = 0 KN.m

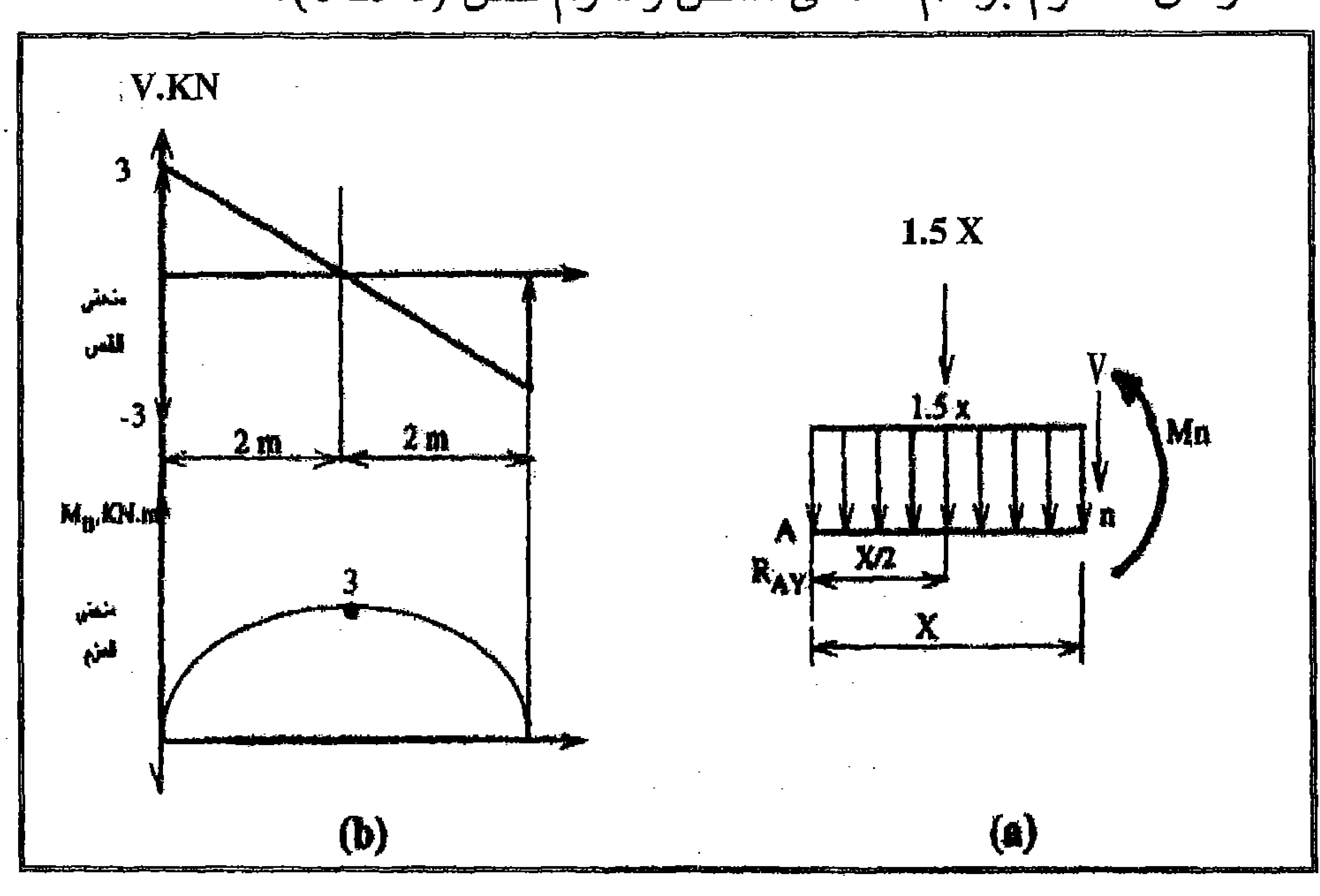
at X = 2 m → V = 0 KN

M_n = 3 KN.m

at X = 4 m → V = -3 KN

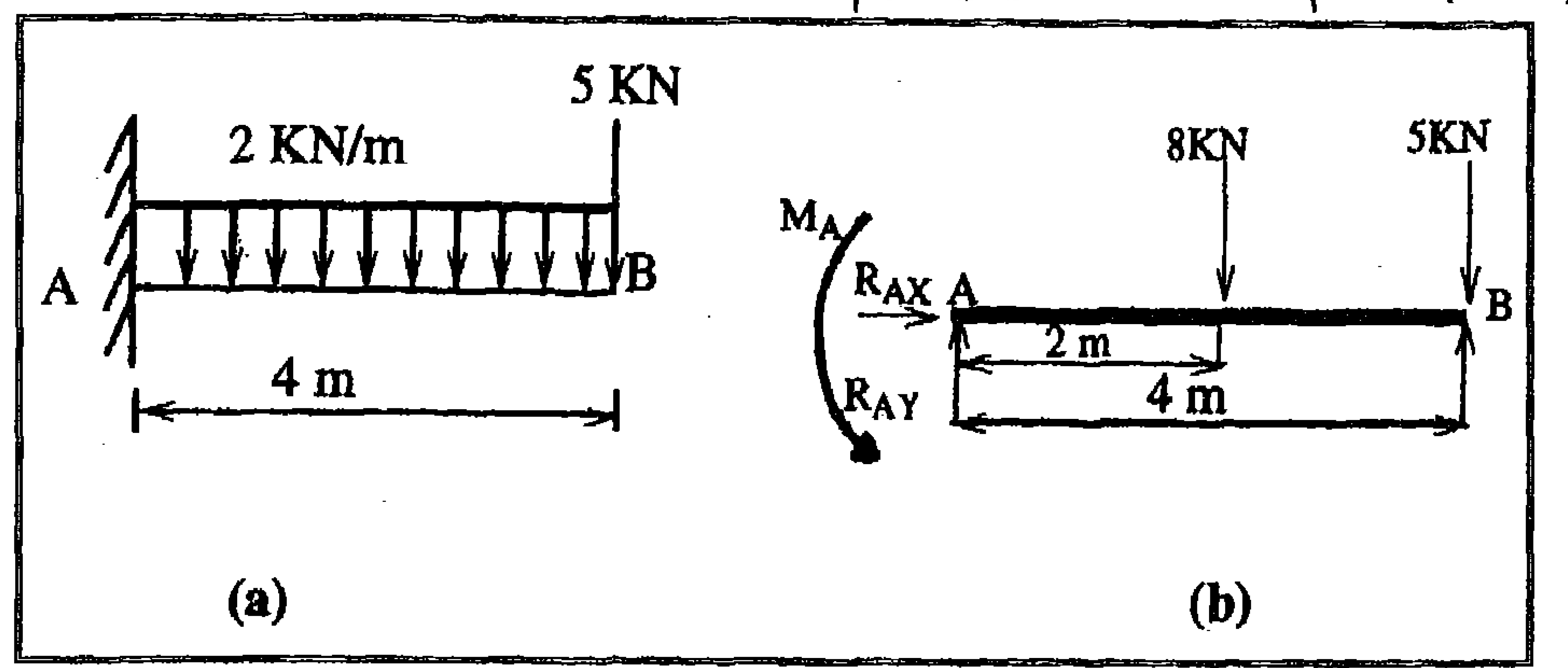
M_n = 0 KN.m

والآن سنقوم برسم منحنى القص والعزم شكل (6-25-b).



شكل (6-25)

(6.14) ارسم مخطط القص والعزم للعتبة الناتئة شكل (6-26-a).



شكل (6-26)

الحل:

لإيجاد ردود الأفعال عند (A) نستعين عن القوة الموزعة بقوة مركزة في المنتصف مقدارها (2 × 4 = 8KN) شكل (6-26-b).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , \quad R_{AX} = 0$$

$$\sum M_n = 0, \; M_A + (-8 \times 2) + (-5 \times 4) = 0$$

$$M_A = 36 KN.m$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \; R_{AY} - 8 - 5 = 0 \; \rightarrow R_{AY} = 13KN$$

For $0 < X < 4$ شكل (6-18- a)

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \; V - 2X + 13 = 0 \; \rightarrow V = 13 - 2X \; \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sum M_n = 0, \; M_n + \left(2X \times \frac{X}{2}\right) + 36 - (13X) = 0$$

$$M_n = -X^2 - 36 + 13X \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

at $X = 0$ m $\rightarrow V = 13$ KN

$M_n = -36$ KN.m

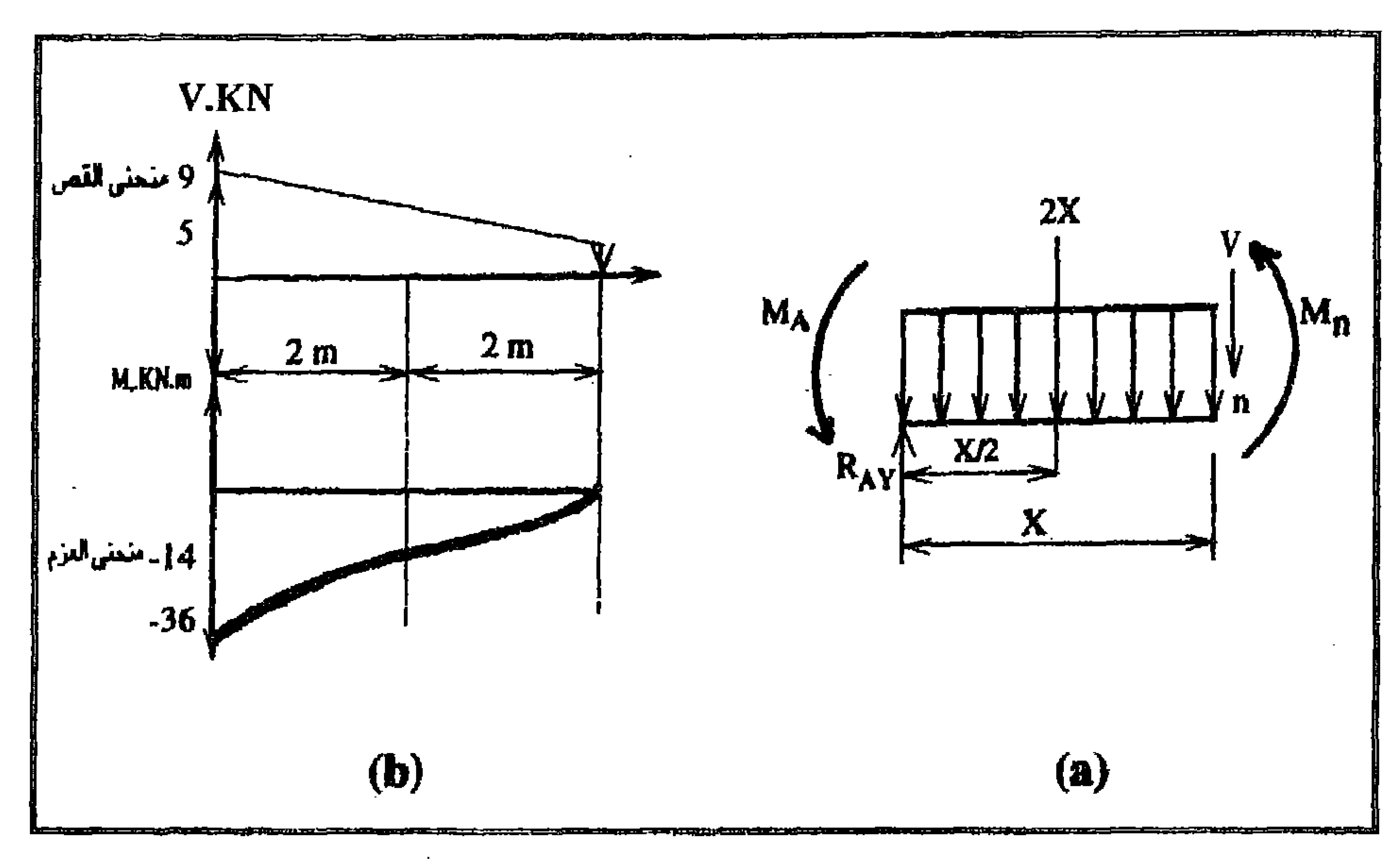
at $X = 2$ m $\rightarrow V = 13 - (2 \times 2) = 9KN$

$M_n = (2)^2 - 36 + (13 \times 2) = -14$ KN.m

at $X = 4\ m \rightarrow V = 13 - (2 \times 4) = 5KN$

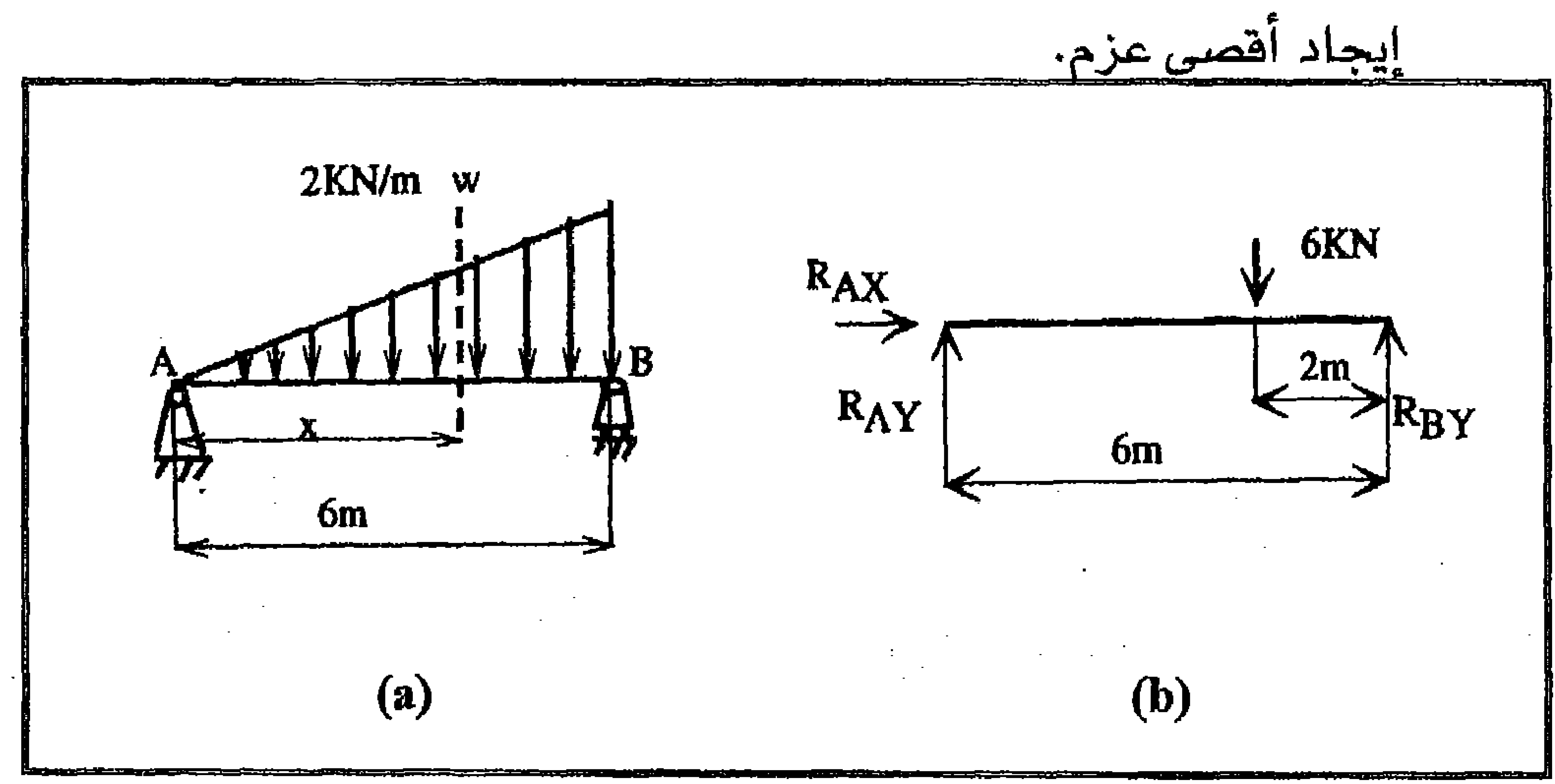
$$M_n = (4)^2 - 36 + (13 \times 4) = 0\ KN.m$$

وبذلك يكون مخطط القص والعزم شكل (6-27-b).



شكل (6-27)

(6.15) ارسم مخطط القص والعزم للعتبة الموضحة في الشكل (6-28-a) مع إيجاد أقصى عزم.



شكل (6-28)

الحل:

بما أن القوة الموزعة على شكل مثلث، نفرض القوة المركزة بمقدار مساحة المثلث وهي $\left(\frac{1}{2}\times 2\times 6 = 6KN\right)$.

وتكون على بعد $\left(\frac{1}{3}\right)$ من القاعدة أي (2m) من (B) أو $\left(\frac{2}{3}\right)$ من الرأس، أي (4m) من و(A)، ونجد ردود الأفعال عند (6-28-b) ثم نرسم مخطط الجسم الحر شكل (AB).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , R_{AX} = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0, \ (-6\times 4) + (R_{BY}\times 6) = 0 \rightarrow R_{BY} = 4KN$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , R_{AY} - 6 + 4 = 0 \ \rightarrow R_{AY} = 2KN$$

شكل (6-29-a) For $0 < X < 6$

من أجل إيجاد قيمة القوة المركزة في الشكل بعد القطع فإننا نحتاج لإيجاد ارتفاع المثلث في الشكل (6-29-a) ولذلك نعود إلى الشكل (6-28-a) ونجري عليه تشابه المثلثات.

$$\frac{w}{2} = \frac{X}{6} \quad \rightarrow \quad w = \frac{X}{3}$$

حيث أن (w) منطقة القطع وهي المطلوب معرفة ارتفاعها.

وتكون قيمة القوة المركزة في الشكل (6-29-a) من مساحة الثلث هي:

$$\frac{1}{2}\times X\times \frac{X}{3} = X^2/6$$

وتكون على بعد $\left(\frac{X}{3}\right)$ من منطقة القطع أي الثلث من القاعدة.

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , 2 - \frac{X^2}{6} - V = 0 \rightarrow V = 2 - \frac{X^2}{6} \ ....(1)$$

$$\circlearrowleft + \sum M_n = 0,\ M_n + \left(\frac{X^2}{6} \times \frac{X}{3}\right) - 2X = 0$$

$$M_n = 2X - \frac{X^3}{18} \quad \text{...} (2)$$

$$\text{at } X = 0\text{m},\quad V = 2\text{KN}$$

$$M_n = 0$$

$$\text{at } X = \sqrt{12}\ \text{m},\quad V = 2 - \left(\frac{\sqrt{12}}{6}\right) = 0$$

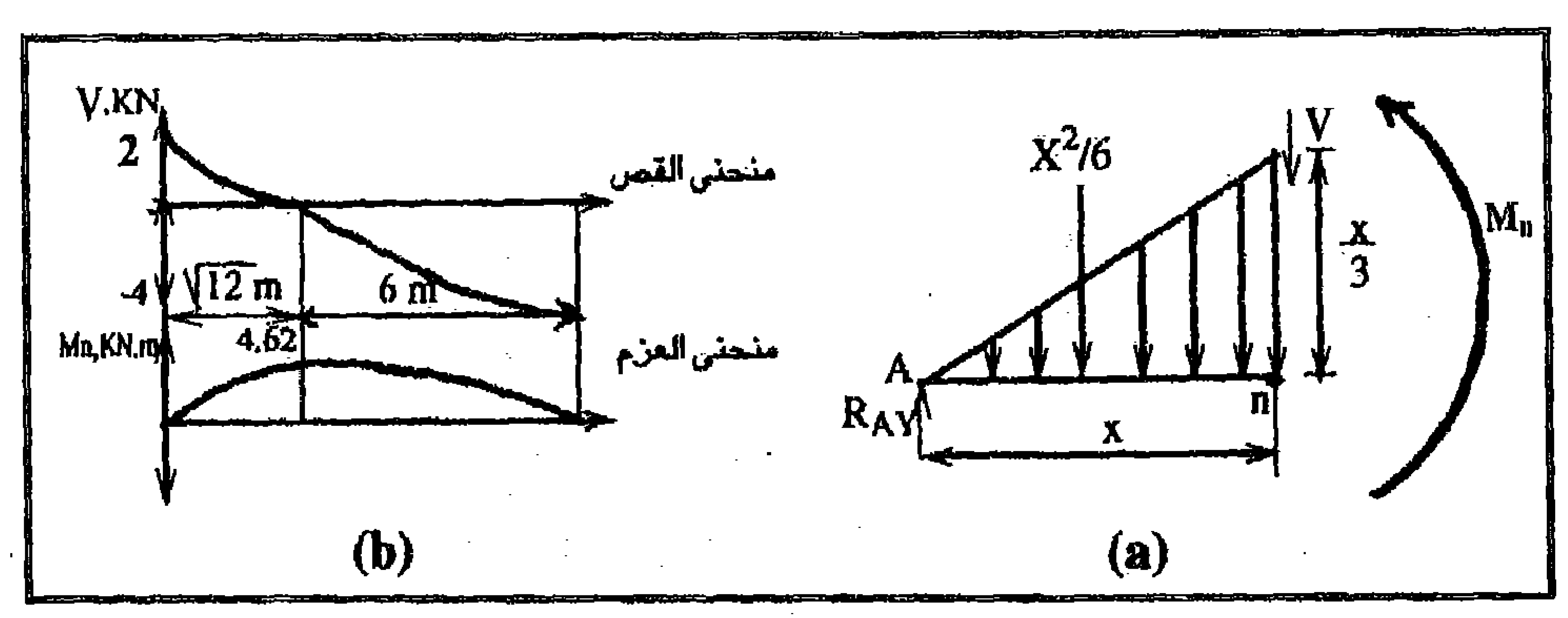
$$M_n = \left(2 \times \sqrt{12}\right) - \left[\left(\sqrt{12}\right)^3 / 18\right] = 4.62\text{KN.m}$$

يكون دوماً أقصى عزم عندما يلتقي منحنى القص مع محور (X) الأفقي، أي عندما تكون (V = 0)، ولإيجاد المسافة على طول العتبة عندها يكون:

$$M_{n\,(max)} \rightarrow V = 0$$

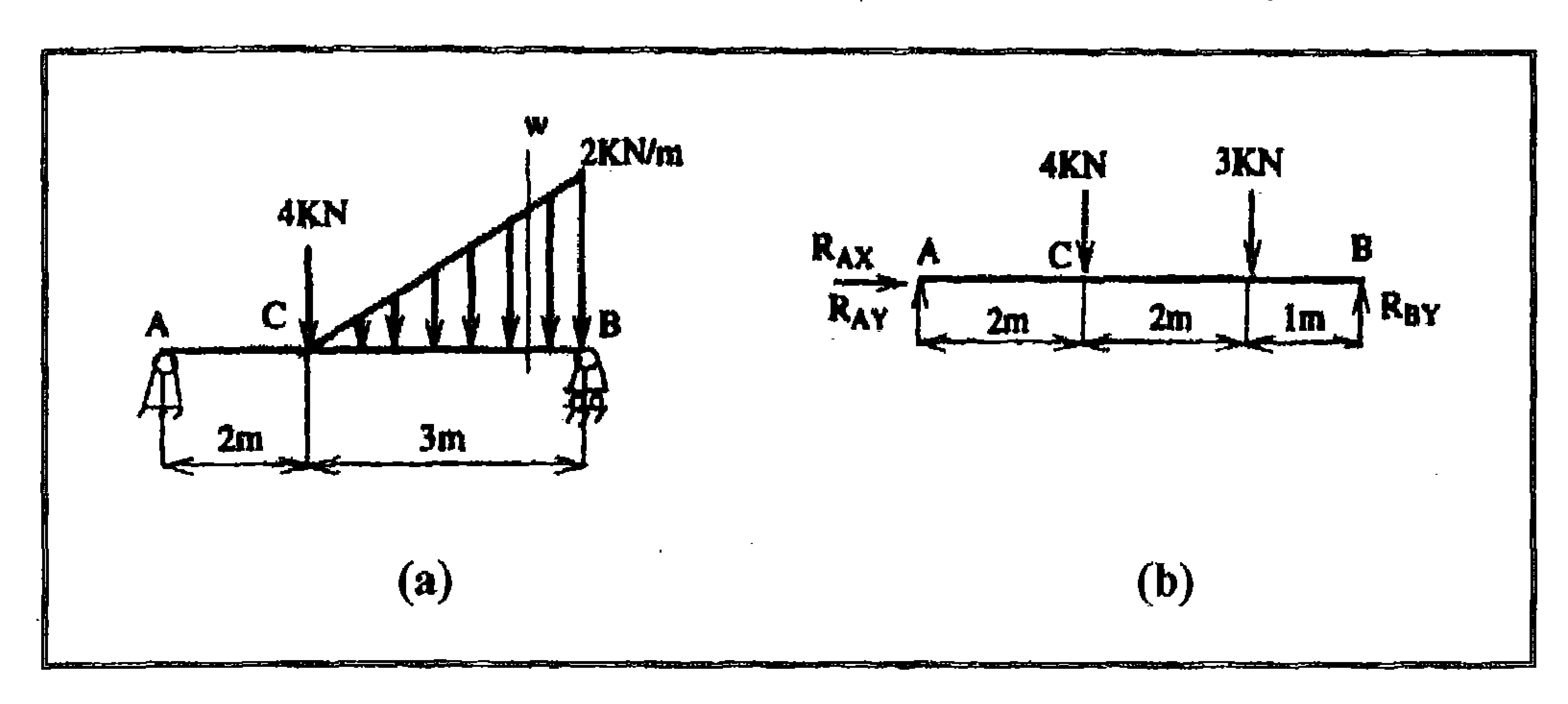
$$V = 2 - \frac{X^2}{6} = 0 \rightarrow V = \sqrt{12}\text{m}$$

وبذلك يكون على بعد $(\sqrt{12}\text{m})$ من النقطة (A) على العتبة أقصى قيمة للعزم وهي (4.62KN.m)، ورسم منحنى القص والعزم شكل (6-29-b) يوضح ذلك.



شكل (6-29)

(6.16) ارسم مخطط القص والعزم للعتبة المبينة في الشكل (6-30-a).



شكل (6-30)

الحل:

تكون القوة الموزعة مركزة على بعد (1m) من (B) ويكون مقدارها:

$$F = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3KN$$

وتوجد ردود الأفعال عند (A) و (B) شكل (6-30-b).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , R_{AX} = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0, \quad (-4 \times 2) + (-3 \times 4) + (R_{BY} \times 5) = 0$$

$$R_{BY} = 4KN$$

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , R_{AX} - 4 - 3 + 4 = 0 \rightarrow R_{AY} = 3KN$$

For $0 < X < 2$ شكل (6-31-a)

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , V + 3 = 0 \rightarrow V = 3KN \quad \text{.........................} (1)$$

$$\circlearrowleft + \sum M_n = 0 \quad , \quad M_n - 3X = 0 \rightarrow M_n = 3K \quad \text{.....................} (2)$$

For $2 < X < 5$ شكل (6-31-b)

قيمة ارتفاع المثلث في هذا القطع (w) ومن الشكل (6-31-b) ومن تشابه المثلثات يكون:

$$\frac{w}{2}=\frac{X-2}{3} \rightarrow w=\frac{2\,(X-2)}{3}$$

وتكون قوة مركزة على بعد $\frac{(X-2)}{3}$ من النقطة (C) ومقدارها يساوي:

$$\frac{1}{2}\times\left[\frac{2\,(X-2)}{3}\right]\times(X-2)=\frac{(X-2)^2}{3}$$

$$+\uparrow \sum F_Y=0 \quad , \; 3-4-\left[\frac{(X-2)^2}{3}\right]-V=0$$

$$V=-\left[\frac{(X-2)^2}{3}\right]-1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\curvearrowleft\!+\sum M_n=0\;,\;(-3\times X)+[4\times(X-2)]+\left[\frac{(X-2)^2}{3}\times\frac{(X-2)}{3}\right]+M_n=0$$

$$M_n=3X-4X+8-\left[\frac{(X-2)^3}{9}\right]$$

$$M_n=8-X-\left[\frac{(X-2)^3}{9}\right]\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$\text{at } X=0\text{m} \rightarrow \quad V=3\text{KN}$

$\qquad\qquad M_n=3\times 0=0\text{KN.m}$

$\text{at } X=2\text{m} \rightarrow \quad V=-1-\frac{(2-2)^3}{3}=-1\text{KN}$

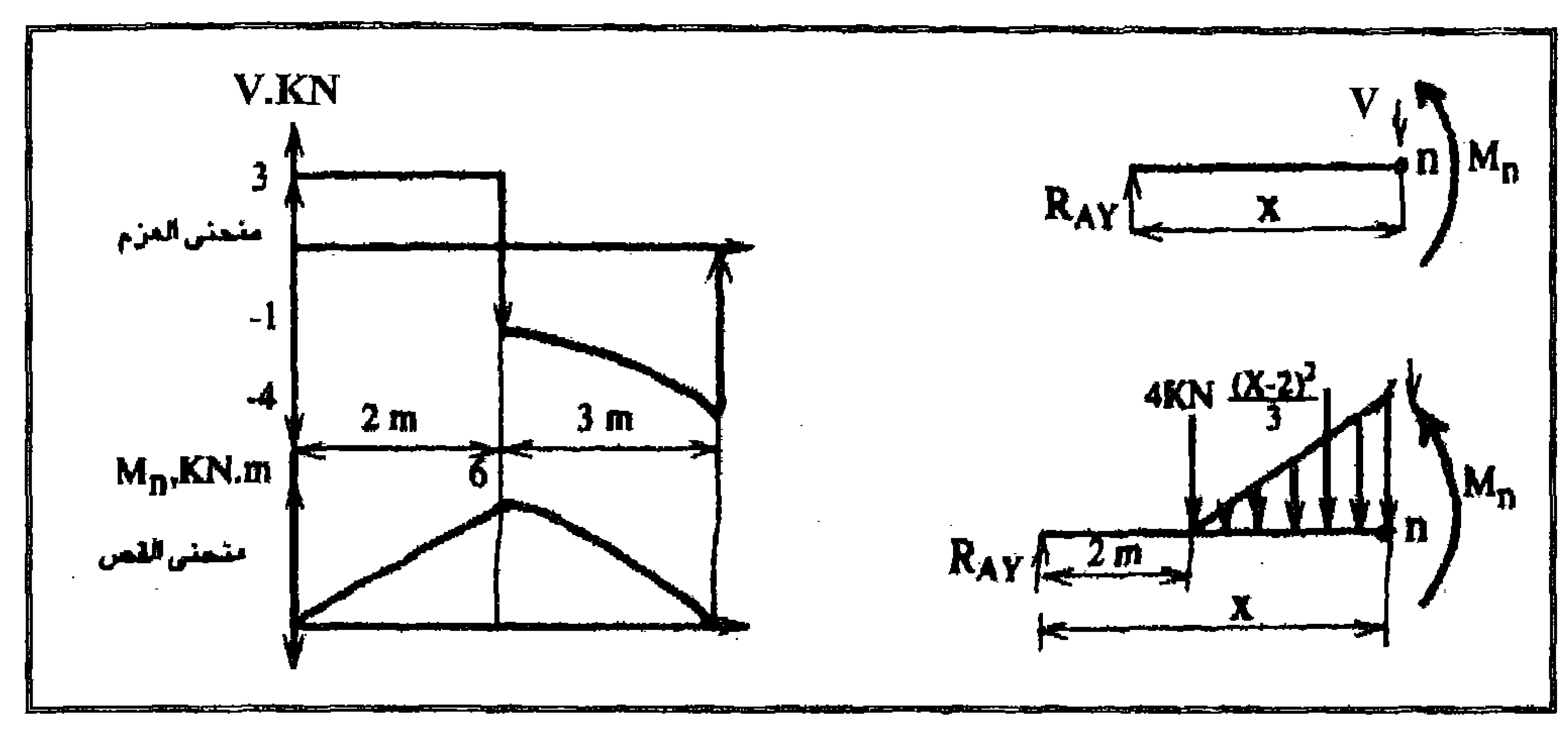
$\qquad\qquad M_n=3\times 2=6\text{KN.m}$

OR: $\qquad M_n=8-2-0=6\text{KN.m}$

$\text{at } X=5\text{m} \rightarrow \quad V=-1-\frac{(5-2)^2}{3}=-4\text{KN}$

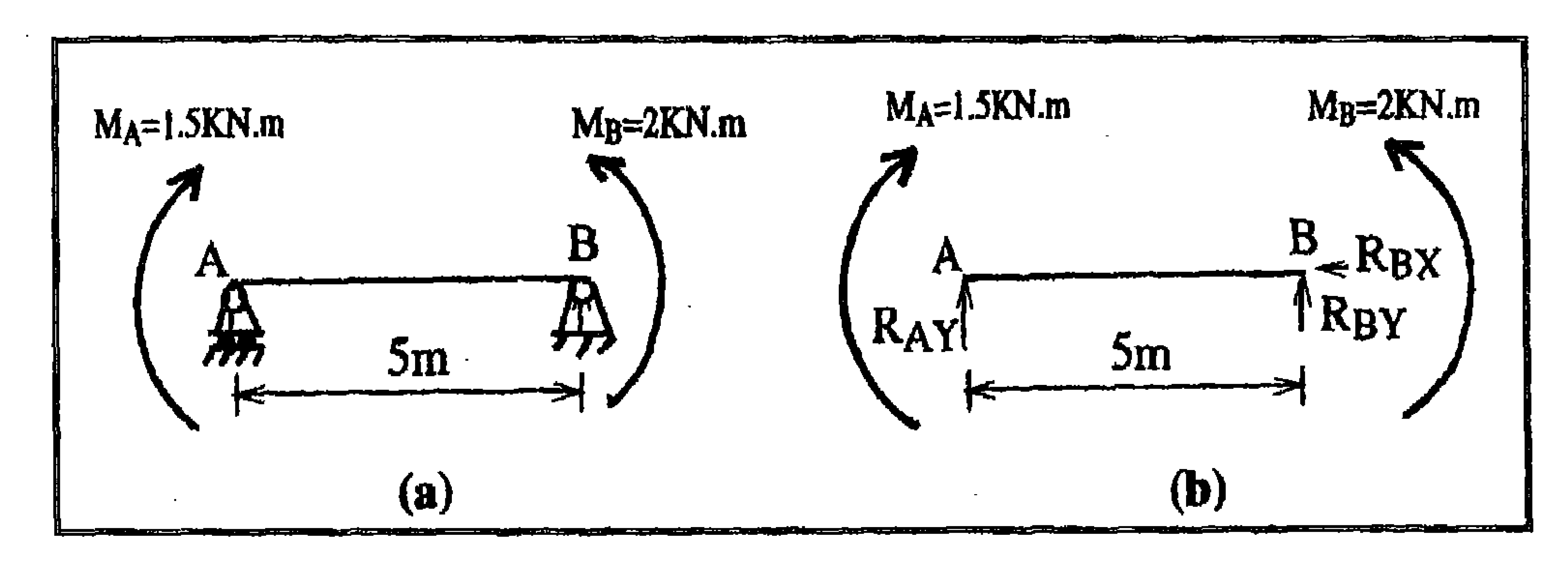
$$M_n = 8 - 5 - \left[\frac{(5-2)^3}{9}\right] = 0\ KN.m$$

والآن سنقوم برسم مخطط القص وللعزم شكل (6-31-c).



شكل (6-31)

(6.17) ارسم مخطط القص والعزم للعتبة الموضحة في الشكل (6-33-a).



شكل (6-32)

نرسم مخطط الجسم الحر شكل (6-32-b) ونحسب ردود الأفعال عند (A) و (B).

$$\xrightarrow{+} \sum F_X = 0 \quad , \; R_{BX} = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0, \quad (R_{BY} \times 5) + (2) - (1.5) = 0$$

$$R_{BY} = -0.1 KN$$

الاتجاه المفروض خاطئ والاتجاه الصحيحي (R_{BY}) هو للأسفل.

For $0 < X < 5$ (6-33-a) شكل

$$+\uparrow \sum F_Y = 0 \quad , \; -V + 0.1 = 0 \rightarrow V = +0.1KN$$

$$\circlearrowleft + \sum M_n = 0 \quad , \; M_n - 1.5 - (0.1 \times X) = 0$$

$$M_n = 1.5 + 0.1X$$

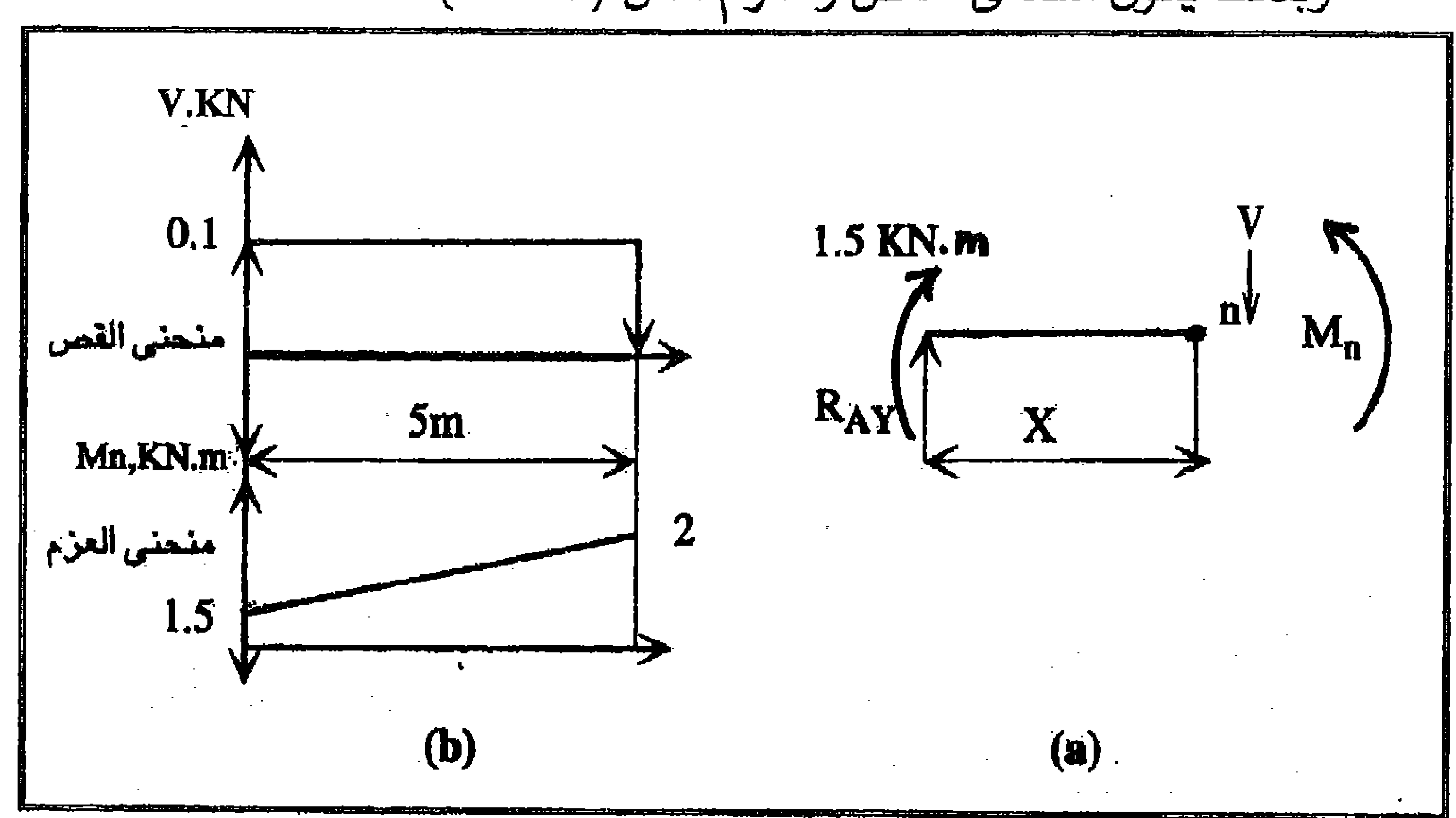
at $X = 0m \rightarrow \quad V = -0.1$ KN

$$M_n = 1.5 + (0.1 \times 0) = 1.5 \text{ KN.m}$$

at $X = 5m \rightarrow \quad V = +0.1$ KN

$$M_n = 1.5 + (0.1 \times 5) = 2KN$$

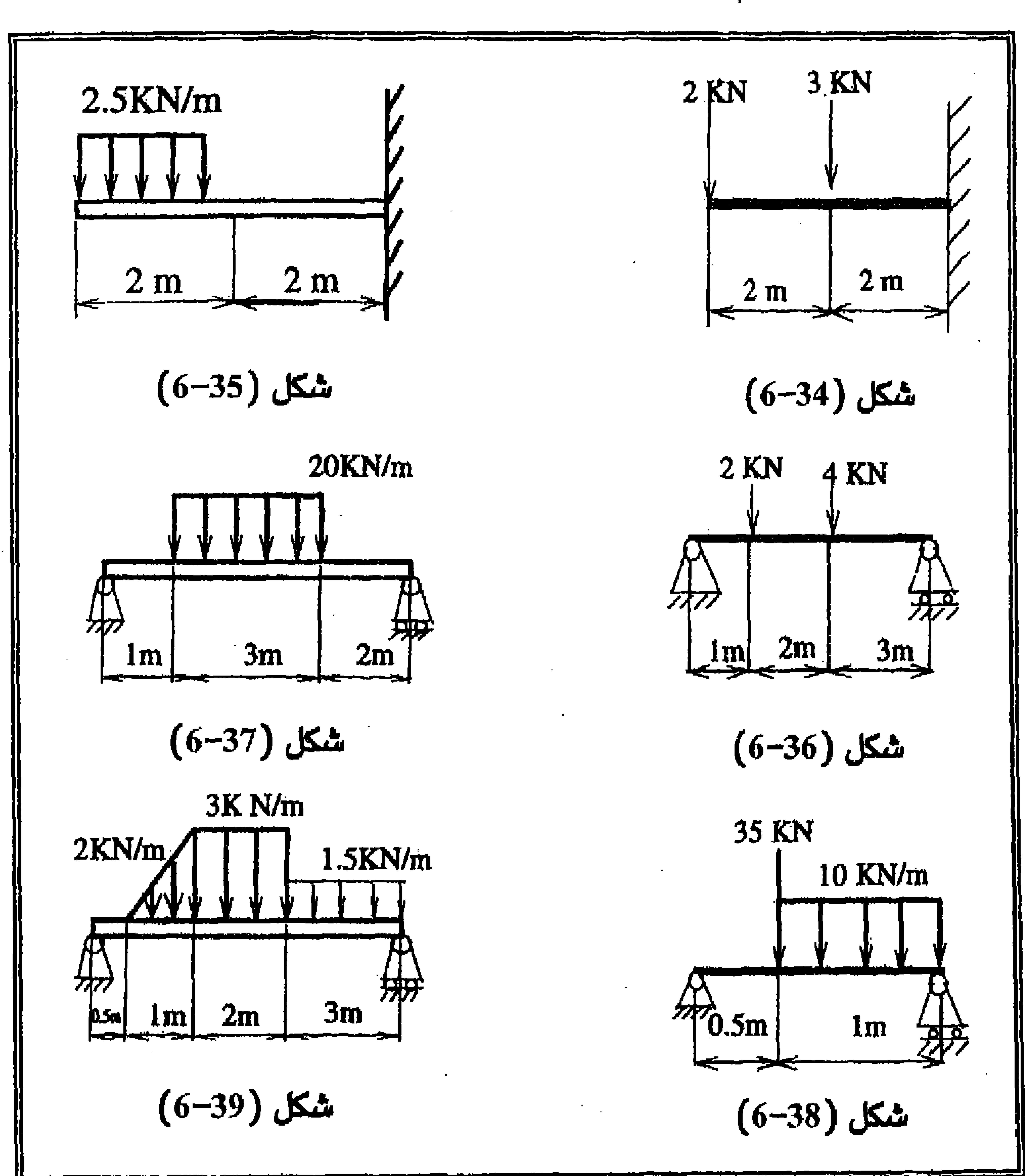
وبذلك يكون منحنى القص والعزم شكل (6-33-b).



شكل (6-33)

مسائل إضافية:

(6.1) للعتبات الموضحة في الأشكال رقم (34- 6) و(35- 6) و(36-6) و(37-6) و(38-6) و(6-39) وشكل (6-39)، اكتب معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبات، وارسم كذلك مخططات قوة القص وعزم الانحناء.



الوحدة السابعة

انبعاج الأعمدة

الوحدة السابعة

انبعاج الأعمدة

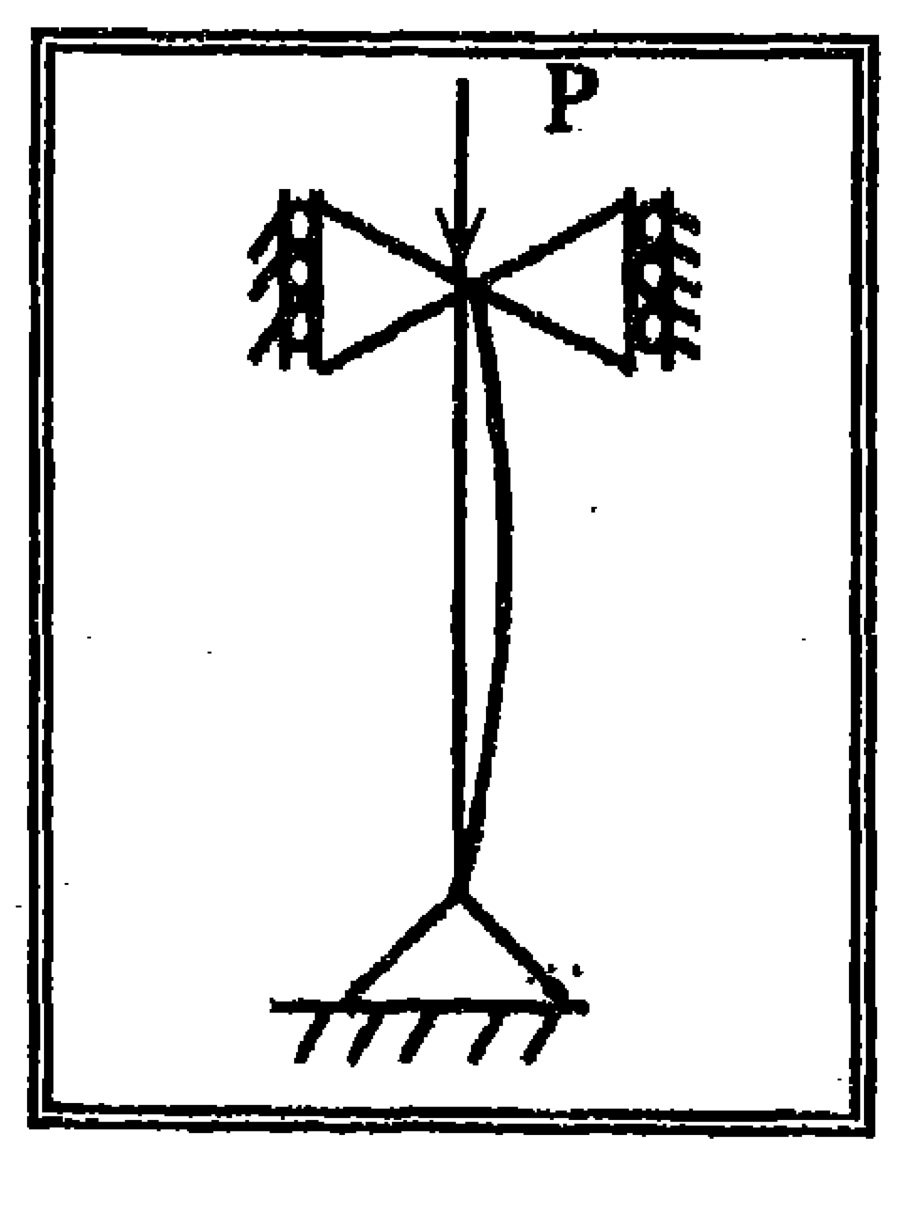
7-1) مقدمة:

يعتمد الاختبار الصحيح للأعضاء الإنشائية بصورة عامة على ثلاثة عوامل رئيسية هي مقاومة مادة الإنشاء (Strength)، والمتانة (Stiffness)، والاستقرار (Stability). وتسمى هذه العوامل حيثيات التصميم (Design Criteria).

سنتطرق لدراسة مقاومة الأعمدة (Columns) على خلاف الاستقرار الاستاتيكي الذي قد ينشأ عن توزيع الركائز أو التفاصيل الداخلية في المنشآت بل استقرار الاتزان.

مثال:

إذا تعرض قضيب (عمود نحيف) إلى ضغط محوري (P) كما في الشكل (7-1) متزايدة فعندما تكون (P) أقل من قيمة (P_{cr}) فعند زوال الحمل (P) فإن العمود يعود إلى وضعه الأصلي، عندئذ فإن العمود في حالة اتزان مستقر (Stable Equilibrium).



شكل (7-1)

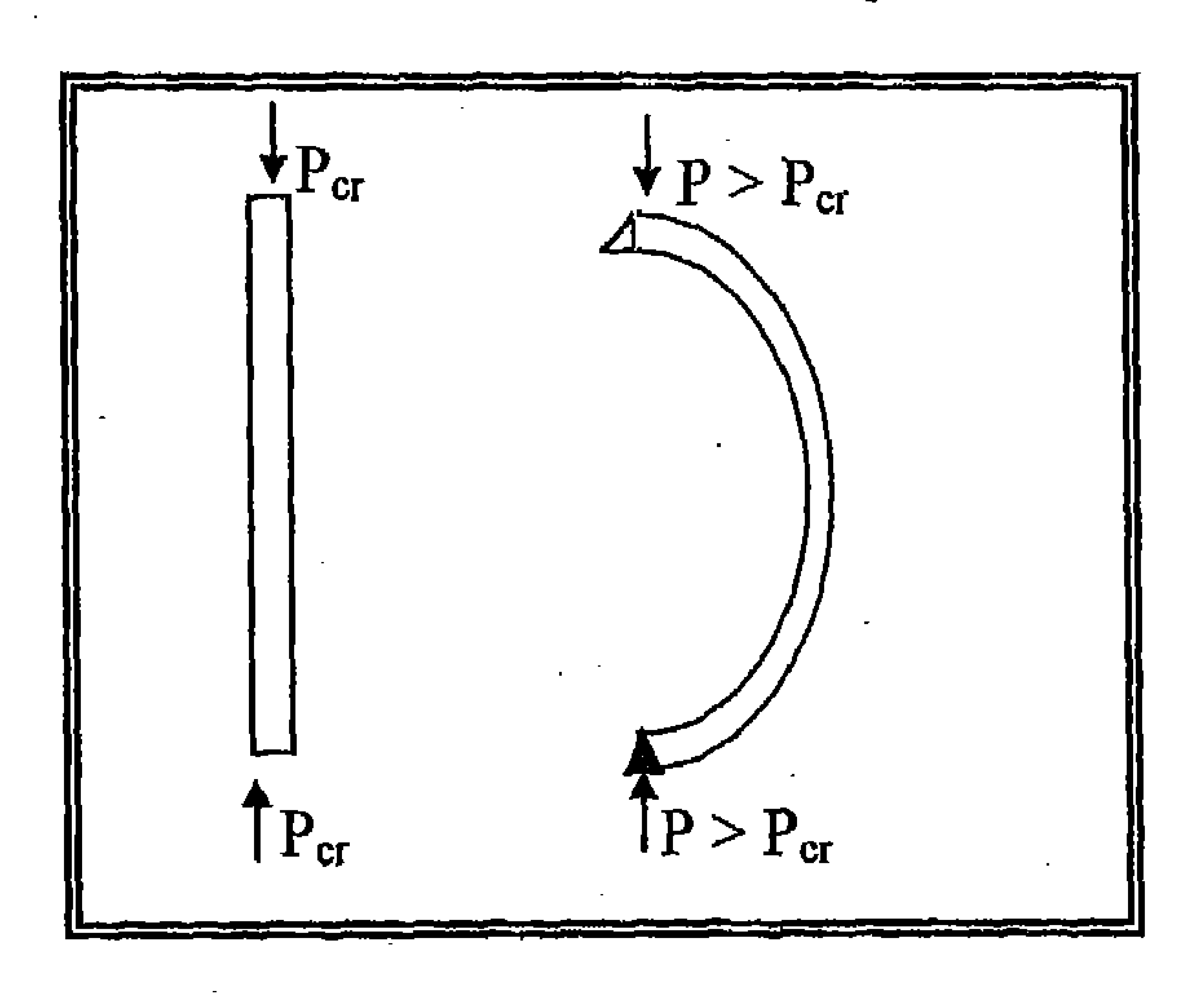
أما عندما تكون (P) في زيادة حتى تبلغ قيمتها (P_{cr}) يبقى العمود منحرفاً بعد زوال القوة العرضية التي تفسد استقامته، يقال ان العمود في حالة اتزان محايد (Neutral Equilibrium) ويسمى الحمل المحوري المناظر حمل الانبعاج (Buckling load) أو الحمل (Critical Loard)، ويرمز له (P_{cr}).

أما إذا (P) عن(P_{cr}) فإن الانبعاج يزداد بزيادة (P) حتى بعد زوال القوة العرضية، ويقال إن العمود في حالة اتزان غير مستقر (Unstable Equilbrium).

يطلق على ظاهرة عدم استقرار الاتزان لفظ الانبعاج (Buckling)، والانبعاج ظاهرة تتعلق بالأعضاء المعرضة لضغط.

7-2) الحمل الحرج(Critical Load) للأعمدة الطويلة"

إن العناصر الاسطوانية الطويلة المتعرضة لأحمال انضغاطية تسمى أعمدة، وإن التشوه الجانبي الحاصل نتيجة هذه الأحمال تسمى الانبعاج.



شكل (7-2)

إن أقصى حمل محوري يمكن للعمود تحمله قبل حدوث الانبعاج يسمى الحمل الحرج (P_{cr}).

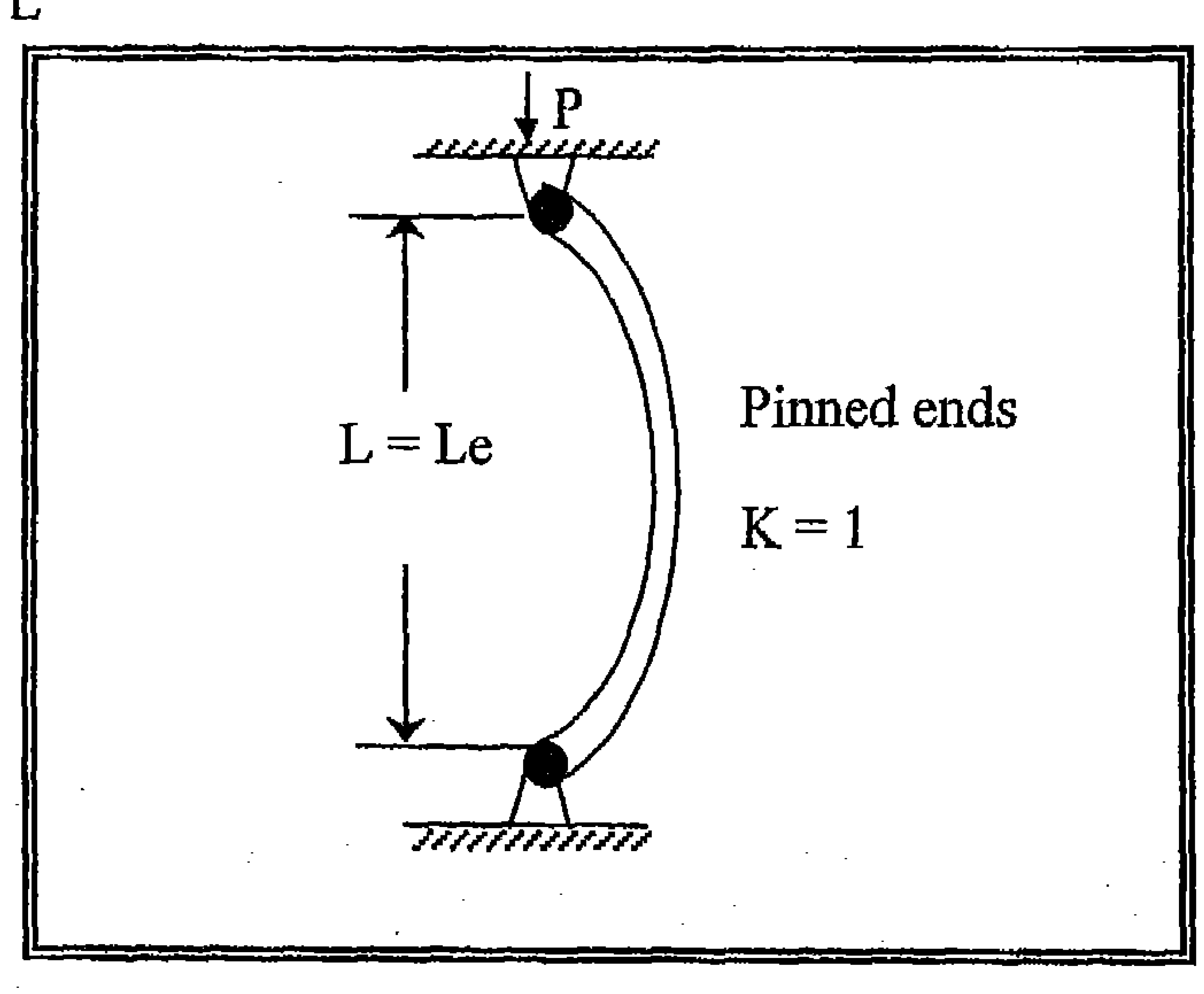
تصف معادلة أويلر (Euler) الحمل الحرج المؤثر على الأعمدة، يمثل الطول (L) في معادلة أويلر المسافة غير المدعمة بين نقطتين ذات عزم مساو للصفر، أما الطول الفعال (L_e) فهو الطول أو المسافة المعرضة لعزم.

تنهار الأعمدة الطويلة بسبب الانبعاج، وقبل أن يبلغ الإجهاد العمودي حد التناسب، وطريقة حساب حمل الانبعاج أو الحمل الحرج لعمود من الأعمدة تدو حول البحث عن قيمة الحمل المحوري الذي يحافظ على اتزان هذا العمود في وضع منحرف قليلاً، ولأن القيود الطرفية للعمود تؤثر تأثيراً جذرياً على قيمة الحمل الحرج فيستقدم فيما يلي تحليلاً للأعمدة ذات قيود مختلفة، وخلال هذا التحليل سيفترض أن العمود منتظم المقطع وأنه من مادة متجانسة تامة المرونة.

الحالة الأولى:

عمود مفصلي الطرفين. شكل (3-7) إن قيمة الحمل تعطى من معادلة أويلر وهي:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (7\text{-}1)$$



شكل (3-7)

حيث أن:

E : معامل المرنة (N/m^2).

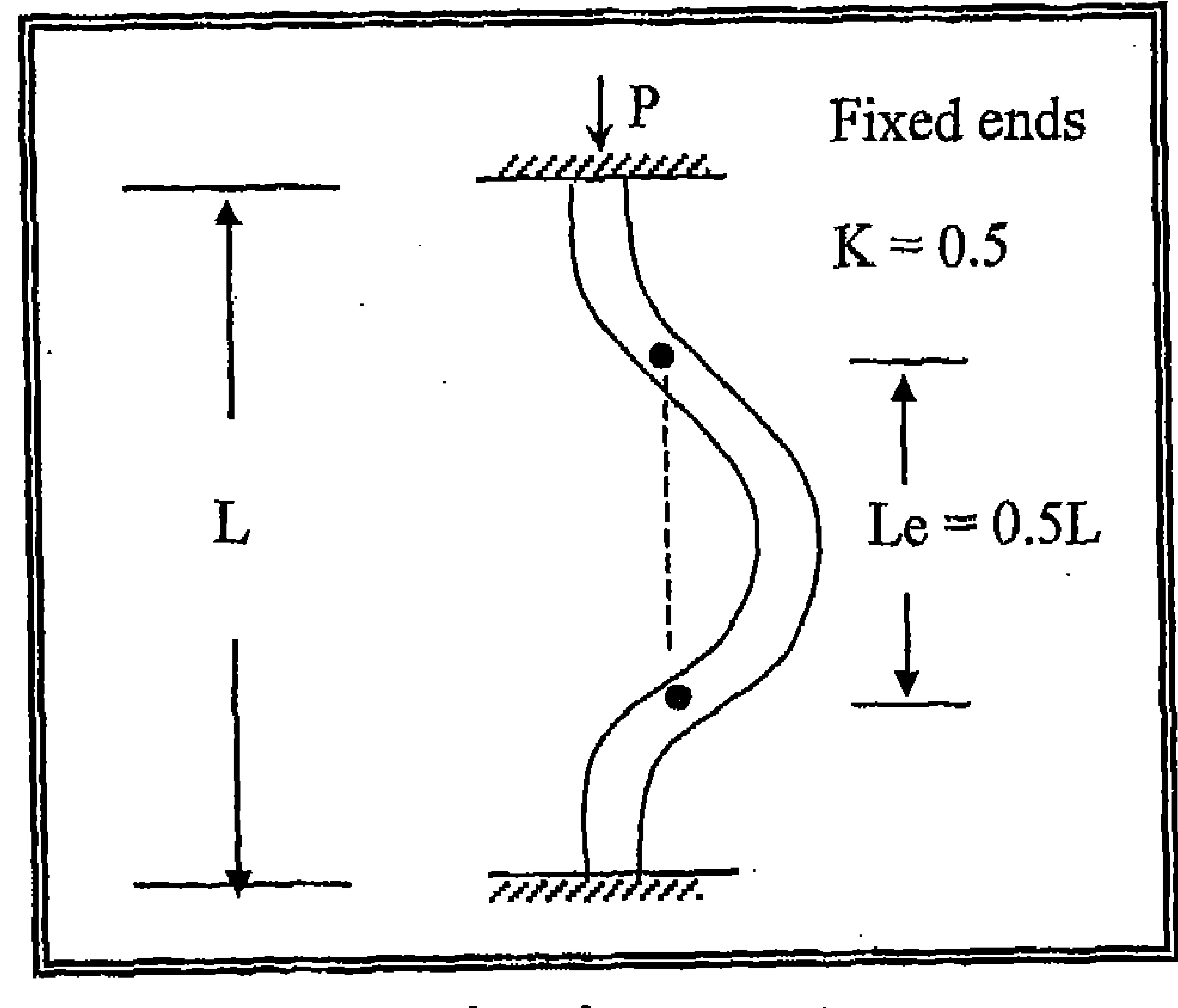
L : طول القضيب، ويعوض عنه في المعادلة بالطول الفعال (L_e). حسب الجدول رقم (2-7).

I : أقل عزم للقصور الذاتي (m^4). ويمكن أخذ قيمة حسب الشكل الهندسي، حسب جدول رقم (1-7).

الحالة الثانية:

عمود مثبت الطرفين، شكل (4-7)

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{.............} \quad (7\text{-}2)$$

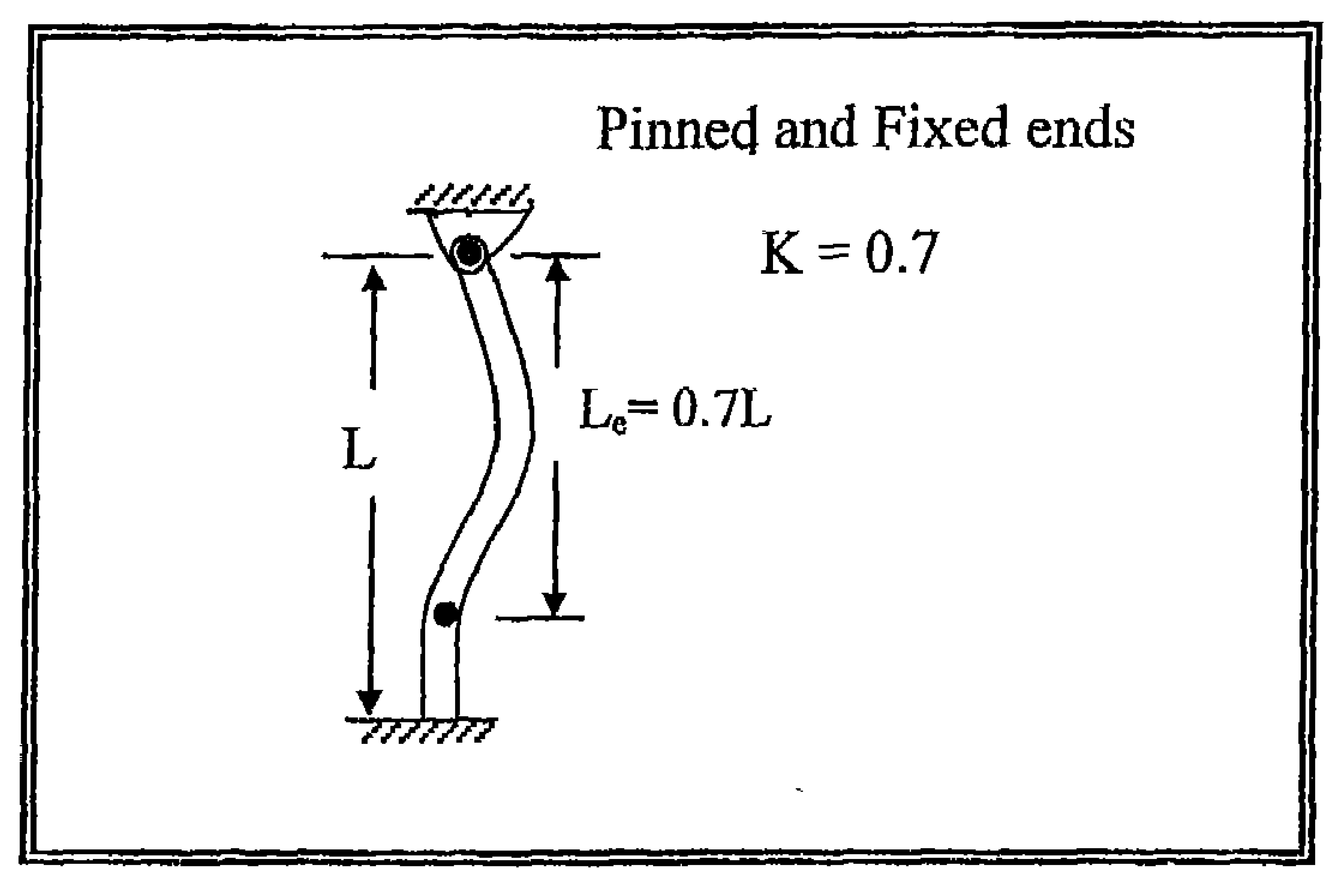


شكل (4-7)

الحالة الثالثة:

عمود مفصلي من طرف ومثبت الطرف الآخر، شكل (5-7)

$$P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{.............} \quad (7\text{-}3)$$

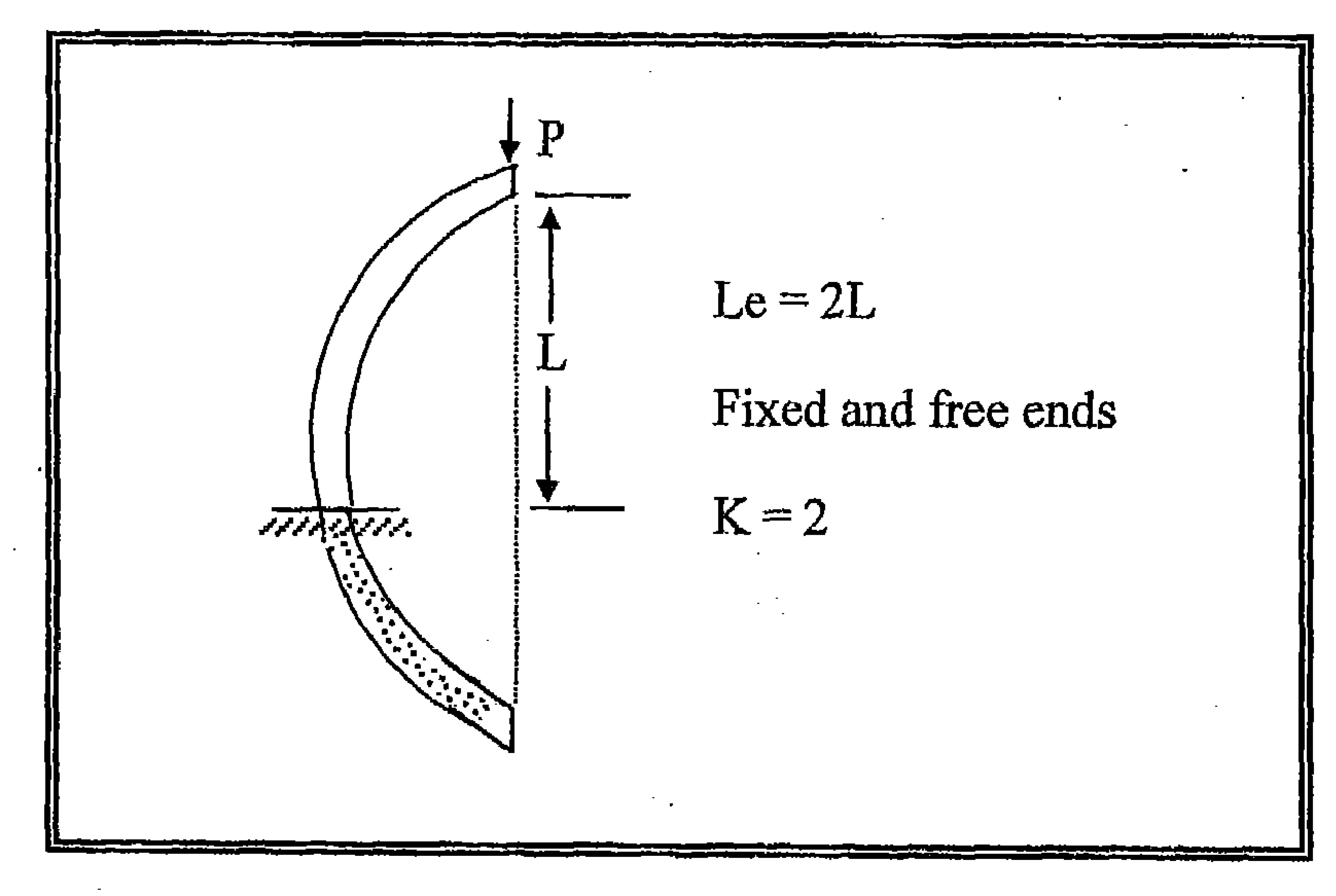


شكل (5-7)

الحالة الرابعة:

عمود مثبت عند طرف وحر عند الطرف الآخر شكل (6-7).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (7\text{-}4)$$



شكل (5-7)

وتعطى صيغة أويلر بالعلاقة التالية:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad \text{...}(7\text{-}5)$$

$$L_e = KL$$

حيث:

P_{cr} : الحمل الحرج.

E : معامل المرونة.

I : أقل عزم قصور ذاتي لمقطع العمود.

K : عامل لطول الفعال (effective -length. factor).

7-3) الصورة العامة لصيغة أويلر:

يمكن صياغة جميع المعادلات للحمل الحرج للأعمدة على اختلاف قيودها الطرفية بصورة عامة باستخدام الطول الفعال أو الطول المكافئ (eqivalent Length) للعمود ويرمز له كما ذكرنا بـ (L_e).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{{L_e}^2} \quad \text{...}(7\text{-}5)$$

وهذه هي الصورة العامة لصيغة أويلر.

نلاحظ من المعادلة أن الحمل الحرج يتناسب مباشرة مع معامل المرونة وعزم القصور الذاتي لمساحة المقطع للعمود وعكسياً مع مربع طوله الفعال. ويكون الإجهاد المحوري الحرج المقابل لهذا الحمل هو:

$$\sigma_{cr} = P_{cr}/A \quad \text{...}(7\text{-}6)$$

حيث أن (A) هي مساحة مقطع العمود (m^2).

أمثلة محلولة:

(7-1) صهريج ماء يرتكز على أربع أعمدة تسمح باعتبار التثبيت تاماً عند القاعدة من الأسفل وحرة الانتقال والدوران عند القمة على المحور (Y-Y)، أما على المحور (X-X) تسمح باعتبارهما مفصلية الطرفين، إذا علمت أن معامل المرنة [E = 2000t/cm2] ، ومساحة مقاطعها مربعة الشكل، وطول ضلعه [15cm]، إذا كان الوزن الشامل للصهريج [150t] وطول العمود [6m].

إحسب الحمل الحرج لإنبعاج الأعمدة؟ أوجد عامل الأمان؟

$A = 225\ cm^2$

$I_{x-x} = bd^3/12 = 15^4/14 = 4218.cm^4$

$I_{x-x} = I_{y-y} = 4218.75\ cm^4$

$P = 160/4 = 40t.$

بالنسبة لاحتمال الانبعاج في المستوى X-X فإن:

$L_e = L = 600cm$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_Y}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 2000 \times 4218.75}{(600)^2} = 231.32t$$

بالنسبة لاحتمال الانبعاج في المستوى Y-Y فإن:

$L_e = 2L = 1200\ cm$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_X}{L_e^2} = \frac{\pi^2 \times 2000 \times 4218.75}{(1200)^2} = 57.83t$$

فيكون الحمل الحرج هو الأقل ويساوي 57.83t.

معامل الأمان (n) يحسب كالتالي:

$n = Pcr / P = 57.83/40 = 1.45$

(7-2) تستخدم اسطوانة ألمنيوم طولها (2m) ومقطعها الدائري رقيق الجدار قطره المتوسط (5cm) وسمكه (0.2 cm) كدعامة، أحسب الحمل الحرج

للاسطوانة مع اعتبارها مفصلية الطرفين؟ أحسب الضغط المحوري المسموح به على الاسطوانة مع عامل أمان ضد الانبعاج (2)، معامل المرونة للألمنيوم ($700 t/cm^2$)؟

الحل:

$$L_e = L = 200\ cm$$

$$I = \pi R^3 t = \pi \times (2.5)^3 \times 0.2 = 9.82\ cm^4$$

$$P_{cr} = \pi^2 EI / L_e^2$$

$$P_{cr} = 1.7\ t$$

$$P_{all} = P_{cr} / n = 1.7/2 = 0.85\ t$$

(7-3) قضيب من الحديد مساحة مقطعه المستعرضة على شكل مستطيل أبعادها (0.03 m) في (0.04m) ومثبت بمفصل عند كل نهاية ومعرض لضغط محوري، إذا علمت أن طول القضيب (2.5m)، ومعامل المرونة له (200GPa)، أوجد قيمة الحمل الحرج للانبعاج لهذا العمود، والإجهاد المحوري المقابل لهذا الحمل.

الحل:

$$I_{x\text{-}x} = \frac{bd^3}{12} = \frac{(0.04)(0.03)^3}{12} = 7 \times 10^{-8}\ m^4$$

$$I_{Y\text{-}Y} = \frac{db^s}{12} = \frac{(0.03)(0.04)^3}{12} = 7 \times 10^{-8}\ m^4$$

نلاحظ أن أقل قيمة لعزم القصور الذاتي هي على المحور (X-X)، وهذه هي القيمة التي يجب أن تستخدم في التعبير عن الحمل الحرج.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi 2 (200 \times 10^9)(1.6 \times 10^{-8})}{(2.5)^2}$$

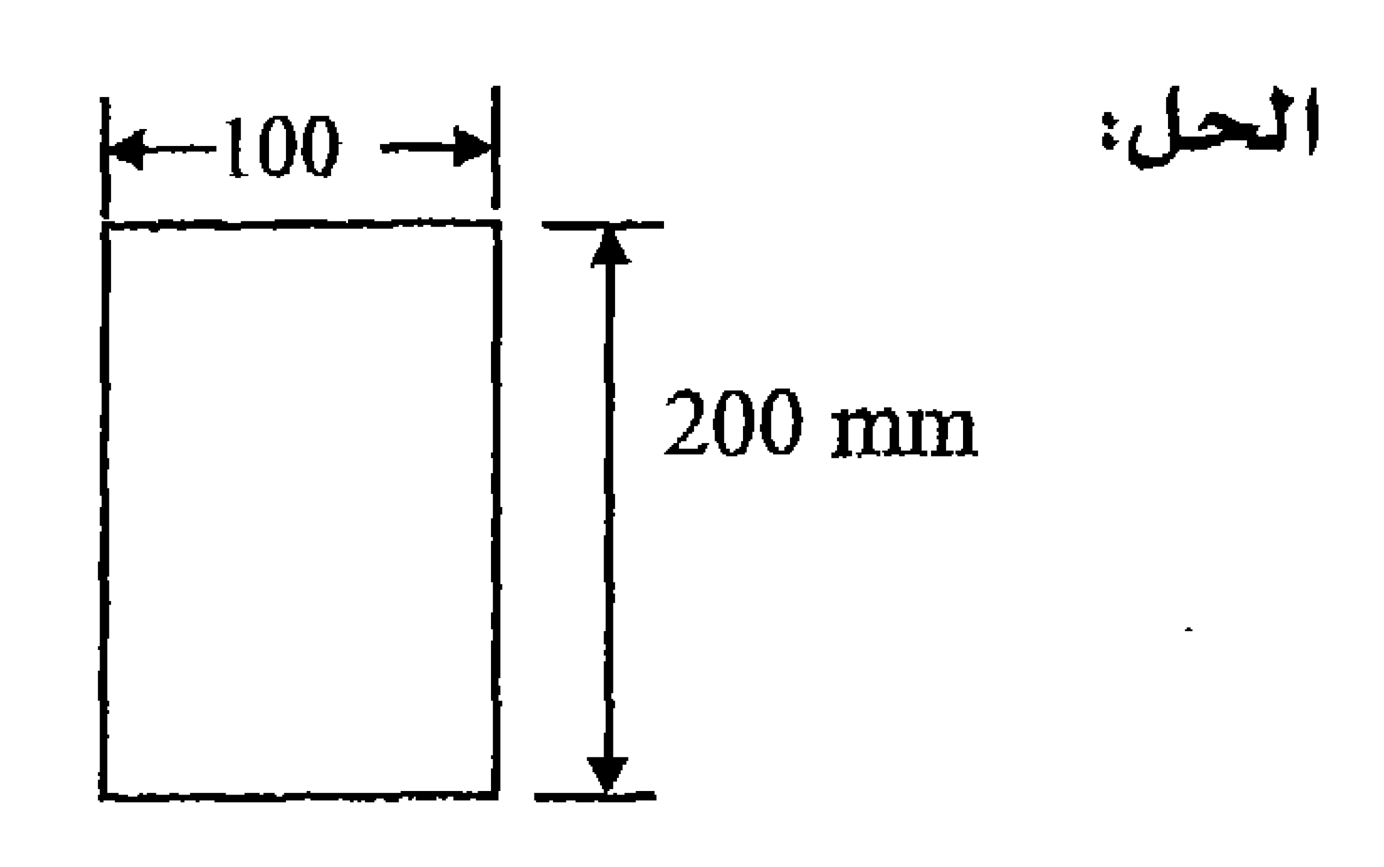
$$= 28.4\ KN$$

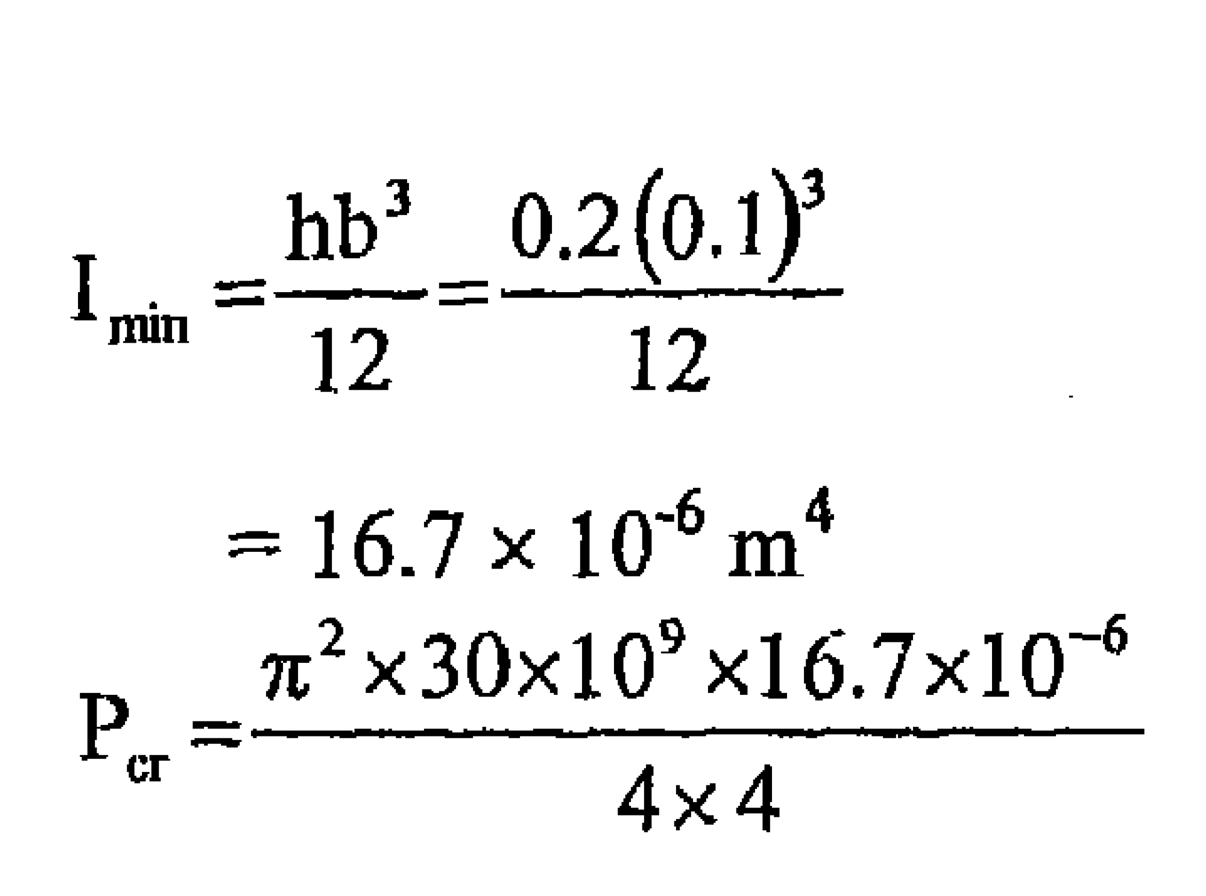
ويكون الإجهاد المحوري الحرج المقابل لهذا الحمل

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{28.4 \times 10^3}{(0.04)(0.03)} = 23.7\ MPa$$

(7-4) عمود من الخرسانة مقيّد من طرف وحرّ الاستناد من طرف، طوله 2m ومساحة مقطعه (100mm × 200mm)، إذا علمت أن معامل مرونته E = 30 Gpa، أوجد حمل الإنبعاج الحرج.

الحل:





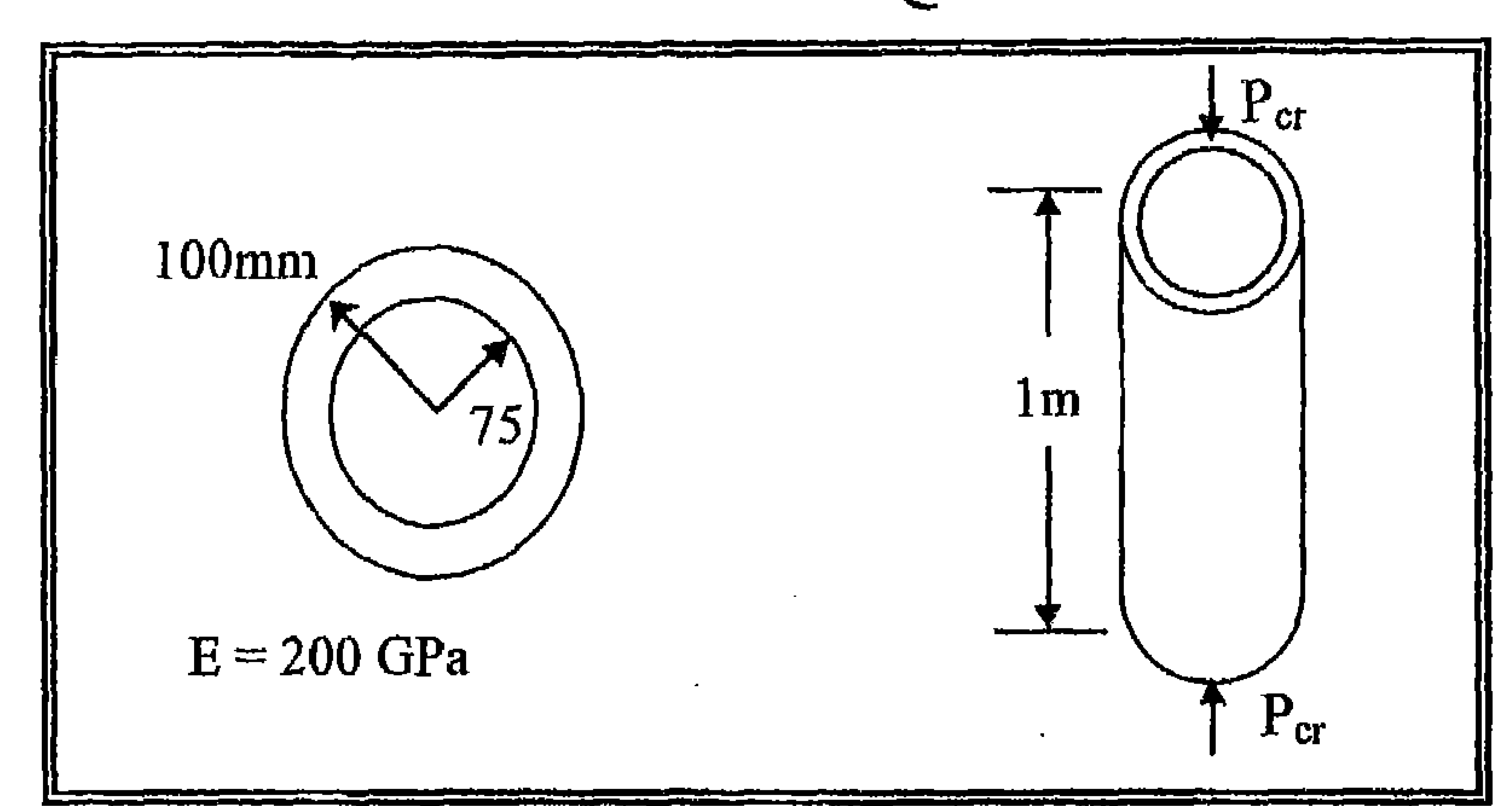
$$I_{min} = \frac{hb^3}{12} = \frac{0.2(0.1)^3}{12}$$

$$= 16.7 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 30 \times 10^9 \times 16.7 \times 10^{-6}}{4 \times 4}$$

$$= 309\ KN$$

(7-5) أنبوب فولاذي طوله 1 m، مقيد من الطرفين، أوجد أقصى حمل يمكن تحمله بدون حدوث انبعاج.



الحل:

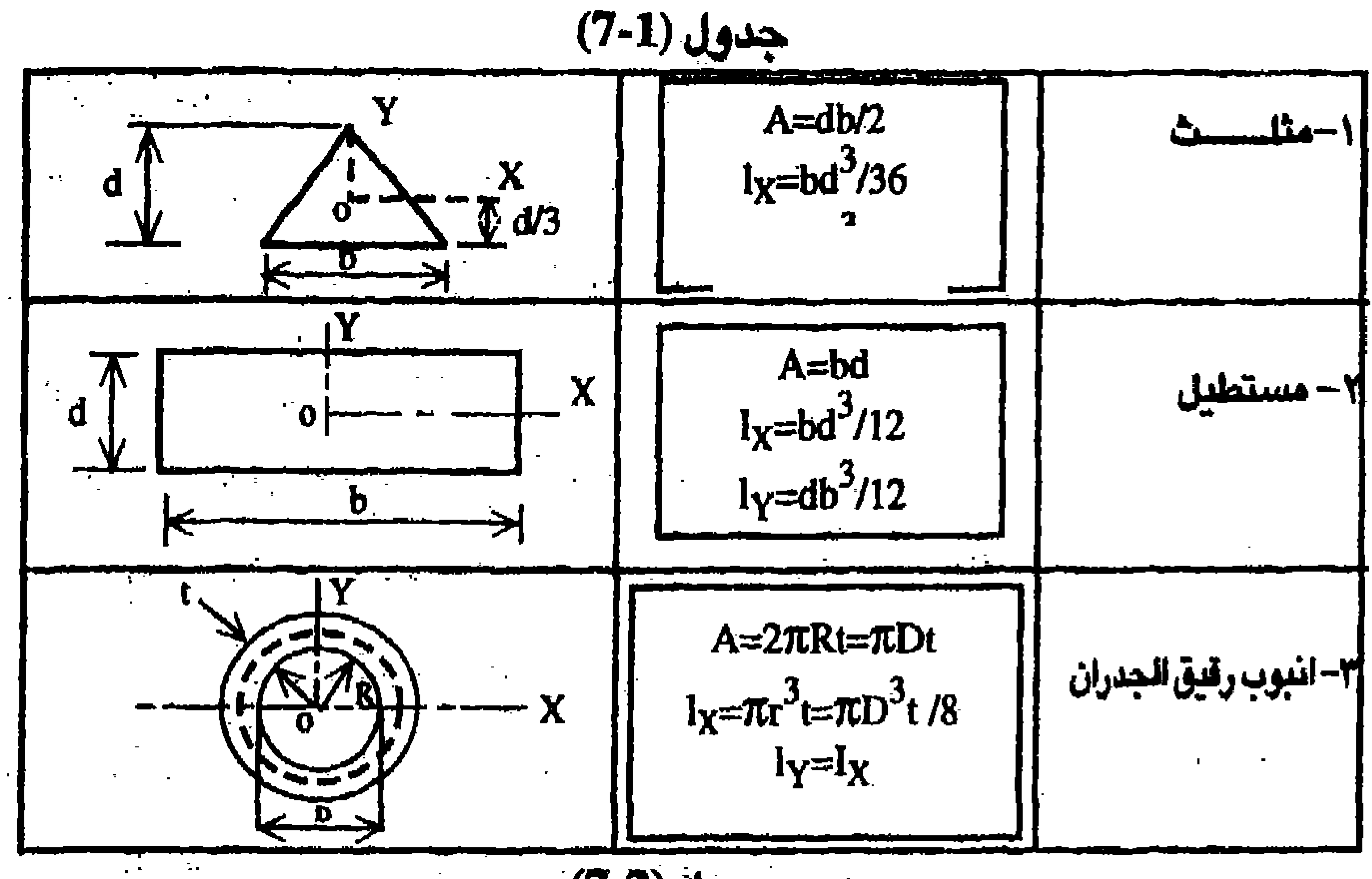
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad , \qquad K = 1$$

$$I = \frac{1}{4}\pi\left((0.1)^4 - (0.075)^4\right) = 53.7 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 53.7 \times 10^{-6}}{1}$$

$$= 106 \times 10^6\ N$$

جدول (7-1)



١-مثلـــــث	$A=db/2$ $I_X=bd^3/36$	Y, X, d, o, d/3, b
٢- مستطيل	$A=bd$ $I_X=bd^3/12$ $I_Y=db^3/12$	Y, X, d, o, b
٣-انبوب رقيق الجدران	$A=2\pi Rt=\pi Dt$ $I_X=\pi r^3 t=\pi D^3 t/8$ $I_Y=I_X$	t, Y, X, o, R, D

جدول (7-2)

القيود الطرفية	شكل القيد	الطول الفعال
الطرفان تثبيت مفصلي	L	L
الطرفان تثبيت تام	0.5 L	0.5 L
احدهما مثبت تثبيت مفصلي والآخر تثبيت تام	0.7 L	0.7L
احدهما تثبيت حر والاخر تثبيت تام	2L	2L
الطرفان ممنوعان من الدوران ومسموح الحركة النسبية بينهما	L	L

مسائل إضافية:

(7-1) قضيب من الصلب له مقطع مستطيل الشكل أبعاده (50mm) في (60mm) ومثبت بمفصل عند كل نهاية، وطوله (1.5m)، إذ علمت أن (E = 200GPa) أوجد مقدار الحمل الحرج للانبعاج.

(7-2) أوجد مقدار قيمة الحمل الحرج لقضيب ذي نهايات مفصلية ومقطعه على هيئة شفة عريضة عمقها (300mm) و ($I_{x\text{-}x} = 40 \times 10^6 mm^4$) و ($I_{Y\text{-}Y} = 4\times10^8 mm^4$) × وطول القضيب (5m) و (E = 200 GPa).

(7-3) قضيب من الصلب مقطعه المستعرض على شكل اسطوانة رقيقة الجدار قطرها (50mm) وسمك الجدار (2mm) ومثبتة بمفصلين عند النهايتين ومعرض لضغط محوري مقدار (400 KN) ومعامل المرونة (200GPa)، عين أول طول للاسطوانة يمكن عنده تطبيق معادلة أويلر.

(7-4) ما هو مقدار معامل الأمان المستخدم في حالة استعمال قضيب مقطعه على شكل شفة عريضة إذا علمت أن أقل قيمة لعزم القصور الذاتي ($I = 45 \times 10^6 mm^4$) ومساحته ($6 \times 10^3 mm^2$) وطوله (5m)، إذا كان قد صمم ليحمل ثقلاً مقداره (0.5MN) والقضيب ذو النهايات مفصلية.

المراجع

1- Mechanics of material by R.C. Hibbler.

2- Mechanies of materials by Bear and Johnsoton.

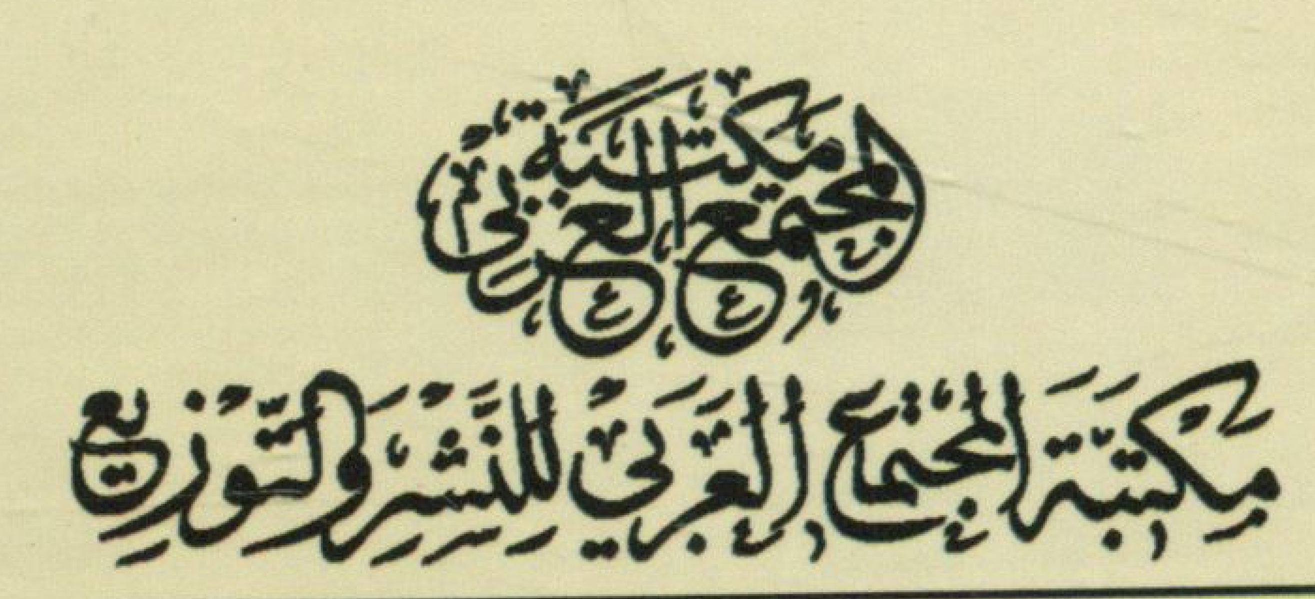
3- مقاومة المواد / د. إبراهيم درويش.

4- سلسلة ملخصات شوم / مقاومة المواد / وليم أ. ناش (Ph.D.).

مقاومة المواد







الأردن-عمان -وسط البلد- ش. السلط - مجمع الفحيص التجاري- تلفاكس : 2739 463 6 962+
خلوي 5651920 79 962+ ص.ب 8244 الرمز البريدي 11121 جبل الحسين الشرقي

الأردن - عمان - الجامعة الأردنية - ش. الملكة رانيا العبدالله - مقابل كلية الزراعة - مجمع زهدي حصوة التجاري

www.muj-arabi-pub.com

E-mail:Moj_ pub@hotmail.com